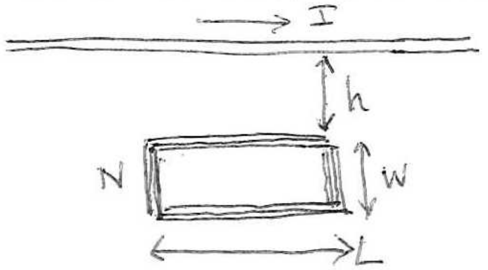
ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΦΙΙ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016

ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ ΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ. Ι. ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ.

1ο Θέμα: Ένας μονωτικός κύλινδρος, άπειρου μήκους και ακτίνας R, έχει χωρική πυκνότητα φορτίου που μεταβάλλεται ως συνάρτηση της ακτίνας ως εξής: $\rho=\rho_0\left(a-\frac{r}{b}\right)$, όπου τα ρ_0, α, και b είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου. Προσδιορίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στις ακτινικές αποστάσεις **α)** $r<R$ **(1.5)** και **β)** $r>R$. **(0.5)**

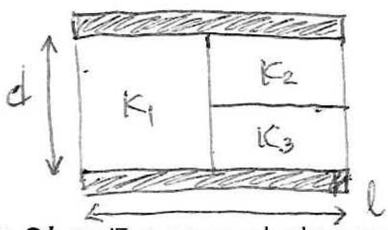
2ο Θέμα: Ένα ευθύγραμμο σύρμα μεγάλου μήκους φέρει ρεύμα το οποίο δίνεται από τη σχέση $I=I_{max}sin(\omega t+\varphi)$. Το σύρμα βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με ένα πηνίο N ορθογώνιων σπειρών.



Τα μεγέθη I_{max}, ω και φ έχουν όλα σταθερές τιμές. Θεωρείστε ότι $I_{max}=50$ A, ω=200π s^{-1}, N=100, $h=w=5$ cm και $L=20$ cm. **α)** Βρείτε την ΗΕΔ που επάγεται στο πηνίο από το μαγνητικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από το ρεύμα του ευθύγραμμου σύρματος. **(2)** Εξηγήστε αν χρειάζεται να λάβετε υπ' όψη σας φαινόμενα διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ή όχι. **(0.5)**

3ο Θέμα: Ένα μακρόστενο φωτεινό αντικείμενο (έστω ΑΒ) τοποθετείται σε απόσταση *75* cm μπροστά από κοίλο κάτοπτρο ακτίνας καμπυλότητας $R_1=100$ cm. Ένα άλλο κάτοπτρο αγνώστου ακτίνας καμπυλότητας τοποθετείται σε απόσταση *112.5* cm μπροστά από το κοίλο κάτοπτρο με την ανακλαστική του επιφάνεια απέναντι του κοίλου. Αν υποθέσουμε ότι οι ακτίνες του αντικειμένου προσπίπτουν πρώτα στο κοίλο κάτοπτρο και ότι το είδωλο του συστήματος των δύο κατόπτρων βρίσκεται στην ίδια θέση με το αντικείμενο ΑΒ, **α)** να σχεδιασθεί και να υπολογισθεί η θέση και η μεγένθυση του ειδώλου του κοίλου κατόπτρου αγνοώντας προς στιγμή την παρουσία του άλλου κατόπτρου **(1)**. **β)** Να βρεθεί η ακτίνα καμπυλότητας του αγνώστου κατόπτρου **(0.5)**, και **γ)** να υπολογισθεί η ολική μεγένθυση του συστήματος των δύο κατόπτρων. **(0.5)**

4ο Θέμα: Ένας επίπεδος πυκνωτής είναι κατασκευασμένος με τη βοήθεια τριών διηλεκτρικών υλικών.



α) Βρείτε μία έκφραση για τη χωρητικότητα του πυκνωτή ως συνάρτηση του εμβαδού του οπλισμού A και των d, κ_1, κ_2, και κ_3. **(1.5)** **β)** Υπολογίστε τη χωρητικότητα χρησιμοποιώντας τις τιμές $A=1cm^2$, $d=2$ mm, $\kappa_1=4.9$, $\kappa_2=5.6$ και $\kappa_3=2.1$. **(0.5)**

5ο Θέμα: Ένα σφαιρικό κάτοπτρο έχει εστιακή απόσταση +10 cm. Έστω αντικείμενο που βρίσκεται αρχικά σε απόσταση $p=25$ cm. Χτυπάτε το αντικείμενο κατά λάθος και αυτό αρχίζει να ολισθαίνει προς το κάτοπτρο με ταχύτητα μέτρου u_p. Πόσο γρήγορα κινείται το είδωλο του αντικειμένου; **(1.0)** Σχολειάστε την κίνηση του ειδώλου σε σχέση με την κίνηση του αντικειμένου. Τι συμβαίνει όταν p->0; **(0.5)**

Δίνονται: $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ Tm/A, $\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ $(C^2/N)m^2$, $V(r)=k_e(dq/r)$, $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$, $u_b=B^2/2\mu_0$,

$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q_{εντός}}{\varepsilon_0}$, $\vec{F}_B=q\vec{u}\times\vec{B}$, $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $\oint\vec{B}\,d\vec{s}=\mu_0 I$

1ο Θέμα. (Η θεωρία για τη λύση της άσκησης αναπτύσσεται στο παράδειγμα Η2.4).

Για να υπολογίσω το ηλεκτρικό πεδίο θα χρησιμοποιήσω το νόμο του Gauss.

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας στην κατανομή φορτίου θα επιλέξω κυλινδρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r και μήκους l, ομοαξονική με τον φορτισμένο κύλινδρο.

Αφού ο φορτισμένος κύλινδρος έχει άπειρο μήκος, το πεδίο θα είναι το ίδιο σ' όλα τα σημεία που ισαπέχουν από το κέντρο του κυλίνδρου (άρα το μέτρο του θα εξαρτάται μόνο από την ακτινική απόσταση r). Επίσης, λόγω της συμμετρίας στην κατανομή φορτίου, στο καμπύλο τμήμα της κυλινδρικής επιφάνειας Gauss το $\vec{E}$ θα είναι κάθετο στην επιφάνεια σε κάθε σημείο της. Επίσης, η ροή που διέρχεται από τις βάσεις του κυλίνδρου Gauss θα είναι ίση με μηδέν, επειδή το $\vec{E}$ είναι παράλληλο μ' αυτές τις επιφάνειες.

Ο νόμος του Gauss στην περίπτωσή μας γράφεται:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0} \quad (1).$$

0.5

Το αριστερό μέρος στην παραπάνω σχέση είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα σ' ολόκληρη την κυλινδρική επιφάνεια Gauss. Επειδή το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ είναι ίσο με μηδέν στις βάσεις του κυλίνδρου, αυτό το ολοκλήρωμα καθορίζεται μόνο από την καμπύλη επιφάνεια του κυλίνδρου, στην οποία $\vec{E} \parallel d\vec{A}$, άρα:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E dA = E \int dA = E 2\pi r l \quad (2).$$

Τώρα, για τον υπολογισμό του $q_{εντός}$, λαμβάνω υπόψη το γεγονός ότι η κατανομή του φορτίου στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι ανομοιογενής. Άρα:

$$\frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V(r)} \rho(r)\, dV \quad (3)$$

0.5

Ο στοιχειώδης όγκος dV στην παραπάνω σχέση είναι ένα κυλινδρικό κέλυφος ακτίνας r, μήκους l & πάχους dr, άρα, $dV = 2\pi r l\, dr$, & επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^r \left(a - \frac{r}{b}\right) 2\pi r l\, dr \Rightarrow$$

$$\frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi \rho_0 l}{\varepsilon_0}\int_0^r \left(a - \frac{r}{b}\right) r\, dr = \frac{2\pi \rho_0 l}{\varepsilon_0}\left[a\frac{r^2}{2}\Big|_0^r - \frac{r^3}{3b}\Big|_0^r\right] \Rightarrow$$

$$\frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi \rho_0 l r^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2} - \frac{r}{3b}\right). \quad (4)$$

Λόγω των (2) & (4) η (1) γράφεται:

$$E\,\cancel{2\pi r l} = \frac{2\pi \rho_0 l r^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2} - \frac{r}{3b}\right) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2} - \frac{r}{3b}\right)}$$

όταν $r < R$. 0.5

(β) Όταν $r > R$, η (3) γράφεται:

$$\frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_V \left(a - \frac{r}{b}\right) dV \Rightarrow \frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi \rho_0 l}{\varepsilon_0} R^2\left(\frac{a}{2} - \frac{R}{3b}\right). \quad (5)$$

Από (5) & (2), η (1) μας δίνει:

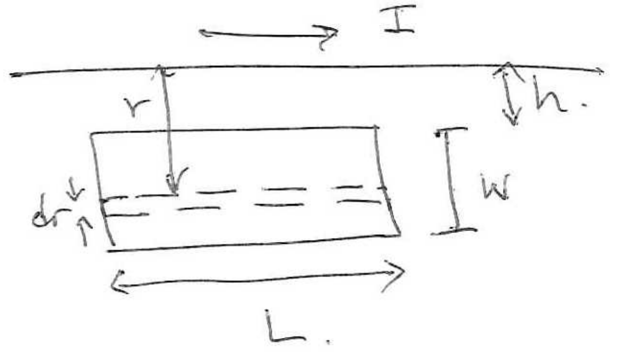
$$E\, 2\pi r l = \frac{2\pi \rho_0 l R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2} - \frac{R}{3b}\right) \Rightarrow$$

0.5

$$\boxed{E = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 r}\left(\frac{a}{2} - \frac{R}{3b}\right)}.$$

(Το πεδίο ελαττώνεται ως $1/r$ με την απόσταση από το κέντρο του κυλίνδρου).

2ο Θέμα



Το ρεύμα στο ευθύγραμμο σύρμα μεγάλου μήκους δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο του πηνίου.

Η ένταση του πεδίου είναι ίση με: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (0.5), όπου r η απόσταση από το σύρμα. Άρα, η συνολική μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από το πηνίο είναι:

$$N \cdot \Phi_B = N \underbrace{\int \vec{B} \cdot d\vec{A}}_{\vec{B} \text{ και } d\vec{A} \text{ συγγραμμικά}} = N \int B\, dA =$$

$$= N \cdot \int_h^{h+w} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot L\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 N L}{2\pi} \int_h^{h+w} \underbrace{I_{max} \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{σταθερές, ανεξάρτητες του r, άρα}} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 N L I_{max}}{2\pi} \ln\left(\frac{h+w}{h}\right) \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (0.5)$$

Άρα:

$$\boxed{\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}} = -N \cdot \frac{\mu_0 N I_{max} L}{2\pi} \ln\left(\frac{h+w}{h}\right) \frac{d \sin(\omega t + \varphi)}{dt} \Rightarrow \quad 0.5$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 N I_{max} L \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{h+w}{h}\right) \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = -\frac{(4\pi \times 10^{-7})\, 100\, (50)\, (0.2)\, (200\pi\, s^{-1})}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{5\,cm}{5\,cm}\right) \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = -87.1\, mV \cos(200\pi t + \varphi)$$

0.5

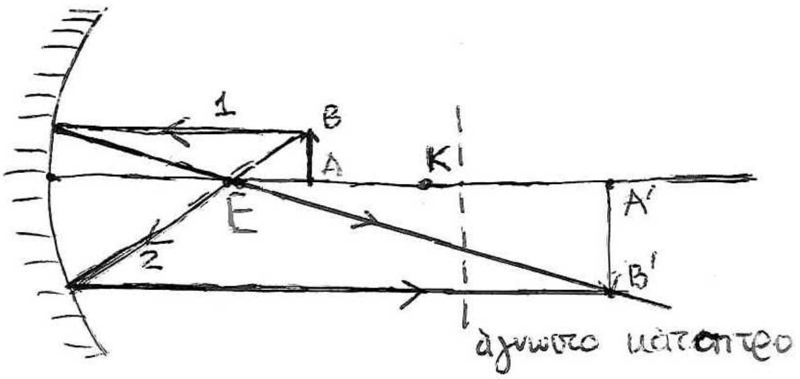
β) Το μαγνητικό πεδίο δεν μεταβάλλεται ταυτόχρονα με το I, σε απόσταση r. Το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα στο σύρμα δημιουργεί ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα c.

Ωστόσο, το $\sin(\omega t+\varphi)$ στη σχέση που μας δίνει το ρεύμα δεν μεταβάλλεται δραστικά για $\omega t \leq 0.1$ rad (ή λιγότερο). Μ' άλλα λόγια, η ένταση του ρεύματος δεν μεταβάλλεται δραστικά για χρονικά διαστήματα $\Delta t < \frac{0.1}{(200\pi\, s^{-1})} = 1.6\times 10^{-4} s$

Κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος, μεταβολές των πεδίων έχουν διαδοθεί σε απόσταση: $l_{crit} = c\Delta t \Rightarrow$ $l_{crit} = 3\times10^{8} \frac{m}{s} \cdot 1.6\times10^{-4} s = 4.8\times10^{4} m$. Αυτή η απόσταση είναι συντριπτικά μεγαλύτερη από την απόσταση του πηνίου από το σύρμα και από τις διαστάσεις του πηνίου. Άρα, δε χρειάζεται να λάβουμε υπ' όψη φαινόμενα διάδοσης του Η/Μ κύματος σ' αυτή την περίπτωση.

0.5

3ο Θέμα.



α). Διάγραμμα ακτίνων για το κοίλο κάτοπτρο.
Η εστιακή απόσταση του κατόπτρου είναι:

$$f = \frac{R}{2} = 50 \text{ cm}.$$

Άρα το αντικείμενο ΑΒ είναι τοποθετημένο στα δεξιά της εστίας, Ε. Η ακτίνα 1 ξεκινά από την κορυφή του αντικειμένου, διαδίδεται παράλληλα προς τον κύριο άξονα και ανακλάται μέσα από την εστία Ε. Η ακτίνα 2 ξεκινά από την κορυφή του αντικειμένου, διέρχεται από την εστία και ανακλάται παράλληλα προς τον κύριο άξονα.
Η κορυφή του ειδώλου, Β', βρίσκεται στο σημείο τομής των δύο ανακλώμενων ακτίνων. ______ 0.5

Για να βρω τη θέση του ειδώλου χρησιμοποιώ την εξίσωση των κατόπτρων:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \quad (1),$$

όπου $f_1 = +50\text{cm}$ (κοίλο κάτοπτρο).
$p_1 = +75\text{cm}$ (πραγματικό αντικείμενο).

άρα: $$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{p_1 - f_1}{f_1 p_1} \Rightarrow$$

$$q_1 = \frac{f_1 p_1}{p_1 - f_1} = \frac{50 \times 75}{75 - 50} = +150 \text{ cm}.$$

Άρα το είδωλο είναι πραγματικό (βρίσκεται μπροστά από το κάτοπτρο). Και, η μεγέθυνση είναι:

$$m_1 = -\frac{q}{p} = -\frac{150}{75} = -2.$$ (Το είδωλο είναι ανεστραμμένο - σύμφωνα με το σχήμα). 0.5

β). Για το δεύτερο κάτοπτρο, το αντικείμενο είναι πίσω από το κάτοπτρο, σε απόσταση: 150 - 112.5 = 37.5 cm

Άρα: $p_2 = -37.5$ (Το αντικείμενο για το δεύτερο κάτοπτρο είναι το είδωλο του κοίλου κατόπτρου). Το είδωλο του δεύτερου κατόπτρου σχηματίζεται στην ίδια θέση που βρίσκεται το σώμα ΑΒ (έτσι μας λέει η άσκηση) άρα σχηματίζεται μπροστά από το κάτοπτρο (κ' είναι πραγματικό). Άρα: $q_2 = 112.5 - 75 = 37.5$ cm. Άρα:

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow -\frac{1}{37.5} + \frac{1}{37.5} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow$$

$f_2 = \infty$. Άρα το άγνωστο κάτοπτρο έχει άπειρη ακτίνα καμπυλότητας, άρα: Επίπεδο κάτοπτρο. 0.5

γ). Η μεγέθυνση του δεύτερου κατόπτρου είναι:

$m_2 = \frac{-p_2}{q_2} = 1$. Οπότε η ολική μεγέθυνση:

$$m_{ολ} = m_1 m_2 = (-2.) \cdot 1 = -2.$$

Άρα, το τελικό είδωλο έχει διπλάσιο ύψος κ' είναι ανεστραμμένο. 0.5

4º ΘΕΜΑ: 4º φυλλάδιο, 3η άσκηση.

5º ΘΕΜΑ: Παράδειγμα 02.3 βιβλίου Serway ("ΚΙ ΑΝ...").