ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΦΙΙ ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ ΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ. ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΙ ΝΑ ΓΡΑΨΕΤΕ ΚΑΛΑ, Ι. ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ.

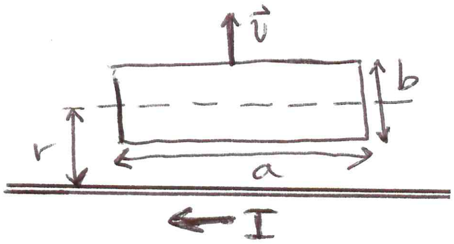
1ο Θέμα: Θεωρείστε λεπτό δακτύλιο φορτίου q και ακτίνας R. Δείξτε ότι το δυναμικό σε κάποιο σημείο πάνω στον κεντρικό άξονα, και σε απόσταση z από το δακτύλιο, δίνεται από τη σχέση: $V(z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(z^2+R^2)}}$ **(1)**. Βρείτε το μέτρο του του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στον άξονα του δακτυλίου **(1)**.

2ο Θέμα: Σ' ένα σκοτεινό δωμάτιο τοποθετείται ένα αναμένο κερί σε απόσταση *1.5 m* από ένα λευκό τοίχο. Ανάμεσα στο κερί και στον τοίχο τοθετείται ένας φακός σε τέτοια θέση ώστε να σχηματίζει ένα μεγαλύτερο, ανεστραμμένο είδωλο πάνω στον τοίχο. Όταν ο φακός βρίσκεται σ' αυτή τη θέση, η απόσταση του αντικειμένου είναι p_1. Όταν ο φακός μετακινηθεί κατά *90 cm* προς τον τοίχο, ένα ακόμα είδωλο του κεριού σχηματίζεται πάνω σ' αυτόν. Βρείτε το p_1 και την εστιακή απόσταση του φακού **(1)**. Βρείτε τις ιδιότητες του ειδώλου (όρθιο ή όχι; φανταστικό ή πραγματικό; μικρότερο ή μεγαλύτερο του αντικειμένου;) στην δεύτερη περίπτωση **(0.5)**.

3ο Θέμα: Θεωρείστε (πολύ) λεπτό υμένιο, πάχους L και δείκτη διάθλασης n_2, που αιωρείται στον αέρα. Έστω ακτινοβολία μήκους κύματος λ που προσπίπτει σχεδόν κάθετα στο υμένιο. Δείξτε ότι το υμένιο θα είναι φωτεινό αν: *2L=(περιττός ακέραιος)/2 × (λ/n₂)*. **(1.0)** Λευκό φως, με ομοιόμορφη ένταση σε όλη την ορατή περιοχή μηκών κύματος (*400 - 690 nm*), προσπίπτει σε υμένιο νερού, με δείκτη διάθλασης *1.33* και πάχους *320 nm*, το οποίο αιωρείται στον αέρα. Σε ποιο μήκος κύματος το φώς που ανακλάται από το υμένιο είναι φωτεινότερο για ένα παρατηρητή; **(1.0)**

4ο Θέμα: Έστω σωμάτιο φορτίου Q που κινείται με σταθερή (μη-σχετικιστική) ταχύτητα $\vec{u}$. Υπολογείστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί σε απόσταση $\vec{r}$ από τη θέση του, κάποια χρονική στιγμή **(1)**. Έστω δύο φορτισμένα σωματίδια, φορτίου Q και Q' που είναι αναγκασμένα να κινούνται κατά μήκους του άξονα x και y, αντίστοιχα, με την ίδια ταχύτητα, u. Τη χρονική στιγμή t=0 και τα δύο φορτία είναι στην αρχή των αξόνων. Υπολογίστε τη δύναμη στο φορτίο Q' λόγω του μαγνητικού πεδίου του φορτίου Q την χρονική στιγμή t **(1)**.

5ο Θέμα: Στο σχήμα ένας ορθογώνιος συρμάτινος βρόχος, μήκους *a=2,2 cm*, πλάτους *b=0.8 cm* και αντίστασης *R=0.4 mΩ*, τοποθετείται κοντά σε αγωγό άπειρου μήκους που τον διαρρέει ρεύμα *I= 467 A*.



Στη συνέχεια ο βρόχος απομακρύνεται από τον αγωγό με σταθερή ταχύτητα *u=3.2 mm/s*. Όταν το κέντρο του βρόχου βρίσκεται σε απόσταση *1.5b*, πόσο είναι

α) το μέγεθος της μαγνητικής ροής διαμέσου του βρόχου **(1)**, και

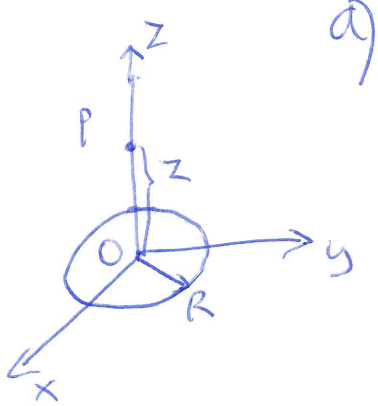
β) το επαγόμενο ρεύμα στο βρόχο **(1.5)**.

Δίνονται: $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ Tm/A, $\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ $(C^2/N)m^2$, $e=1.602\times10^{-19}$ C, $V(r)=k_e(dq/r)$, $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$, $u_b=B^2/2\mu_0$, $\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q_{εντός}}{\varepsilon_0}$, $\vec{F}_B=q\vec{u}\times\vec{B}$, $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $\oint\vec{B}\,d\vec{s}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$, $1/f=(n-1)(1/R_1-1/R_2)$, $\sin(\theta_{σκοτ})=(m+0.5)\lambda/d$, $\sin(\theta_{σκοτ})=m\lambda/a$, $\sin(\theta_{φωτ})=m\lambda/d$, $U=(1/2)C\Delta V^2$, $U=(1/2)LI^2$.

2º Θέμα: 4η άσκηση φυλλαδίου Nº 14.

3º Θέμα: Ενδεικτικό πρόβλημα 35-5, βιβλίο Halliday - Resnick - Walker.

$1^{\underline{o}}$ ΘΕΜΑ.



α) Έστω σημείο P στον άξονα z, το οποίο απέχει απόσταση z από το κέντρο του δακτυλίου (O). Έστω ότι χωρίζουμε τον δακτύλιο σε μικρά τμήματα, το καθένα φορτίου dq. Το δυναμικό στο σημείο P θα δίνεται από τη σχέση:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \quad (1) \quad (0.25)$$

, όπου r είναι απόσταση μεταξύ των στοιχειωδών τμημάτων του δακτυλίου & του P. Για όλα τα τμήμα η απόσταση είναι ίδια, ίση με $\sqrt{R^2+z^2}$. (0.25). Άρα:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\int dq \Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}}}$$

0.5

β). Εξ ορισμού: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial z}$ και $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$. Δεδομένου ότι για όλα (0.5) τα σημεία στον άξονα z ισχύει ότι: $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \emptyset$, το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του άξονα z θα είναι ίσο με:

$$E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2+R^2\right)^{-1/2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\right)\left(z^2+R^2\right)^{-3/2}2z \Rightarrow$$

$$E(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$ (0.5).

4º ΘΕΜΑ. α) Η κίνηση του σωματίου ουσιαστικά ισοδυναμεί με ρεύμα έντασης I, τέτοιας ώστε (εξ ορισμού): $Idt = Q$. (1) 0.25.

Επομένως, η κίνηση αυτή θα δημιουργήσει μαγνητικό πεδίο, το οποίο θα δίνεται από το νόμο των Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3} \left(\text{αφού } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}\right) \quad (2)$$ 0.25.

όπου $d\vec{B}$ το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο που δημιουργ[εί] στοιχειώδες τμήμα αγωγού ($d\vec{l}$) σε σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $\vec{r}$. Στην περίπτωση μας η κίνηση του σωματιδίου ισοδυναμεί με αγωγό μήκους: $d\vec{l} = \vec{v}dt$, 0.25. ο οποίος διαρρέεται από το ρεύμα της σχέσης (1)

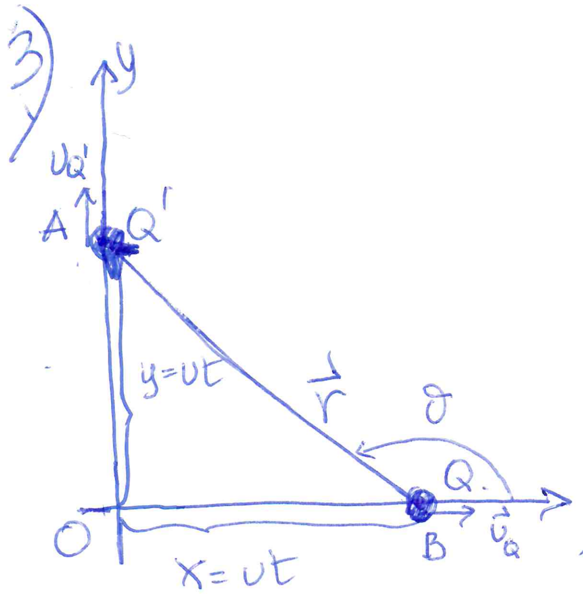
Άρα το μαγνητικό πεδίο, $\vec{B}$, σε απόσταση $\vec{r}$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{v}dt\times\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 Idt}{4\pi}\frac{\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi}\frac{\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}} \quad (3)$$

0.25.

3)



Δεδομένου ότι και τα δύο σωμάτια βρίσκονται στη θέση O τη χρονική στιγμή $t=0$, τη χρονική στιγμή t θα βρίσκονται στη θέση $\vec r_Q = (vt, 0, 0)$ και $\vec r_{Q'} = (0, vt, 0)$. Το διάνυσμα θέσης του Q' ως προς το Q είναι το $\vec r$ (στην εικόνα) με μέτρο $r = \sqrt2\, vt$ Άρα, τη χρονική στιγμή t, το μαγνητικό πεδίο του φορτίου Q στο σημείο A θα είναι:

$$\vec B_Q(A) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi}\frac{\vec v \times \vec r}{(\sqrt2 vt)^3} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi}\frac{1}{(\sqrt2 vt)^3}\cdot v r \sin \Rightarrow$$

$$\vec B_Q(A) = \frac{\mu_0 Q \sqrt2 v^2 t}{4\pi \sqrt2\, 2 v^3 t^3}\cdot \sin\theta\, \hat k \quad (1),$$

όπου $\sin\theta = \sin(135^\circ) = \frac{1}{\sqrt2}$

0.5

(το τρίγωνο BOA πάντα ισοσκελές, άρα $O\hat BA = 45^\circ$)

Οπότε η (1) γράφεται:

$$\vec B_Q(A) = \frac{\mu_0 Q \cancel{\sqrt2} \cancel{v^2} \cancel{t}}{4\pi \cancel{\sqrt2}\, 2 v^3 t^3}\frac{1}{\sqrt2}\hat k = \frac{\mu_0 Q}{8\pi\sqrt2}\frac{1}{vt^2}\hat k$$

(τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου τη βρίσκω με από τον κανόνα του δεξιού χεριού)

Τώρα, λόγω του $\vec B_Q$ στη θέση A, το σωμάτιο Q' δέχεται δύναμη Lorentz:

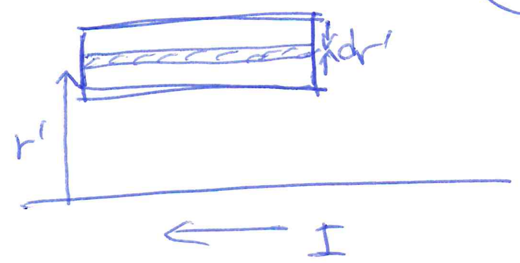
$$\vec F = Q' \vec v_{Q'} \times \vec B = Q' v \hat j \times \frac{\mu_0 Q}{8\pi\sqrt2}\frac{1}{vt^2}\hat k \Rightarrow$$

0.25

$$\vec F = \frac{Q' \cancel{v} \mu_0 Q}{8\pi\sqrt2\, \cancel{v} t^2}\hat i \Rightarrow \boxed{\vec F = \frac{\mu_0 Q Q'}{8\sqrt2 \pi t^2}\hat i}$$

0.25

5ο ΘΕΜΑ.



(α) Ο αγωγός μεγάλου μήκους δημιουργεί μαγνητικό πεδίο που το μέτρο του δίνεται από τη σχέση:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad 0.25$$

όπου I το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό και r η απόσταση από αυτόν. Με βάση τη φορά του ρεύματος που μας δίνεται το μαγνητικό πεδίο έχει φορά από τη σελίδα προς τα μέσα στην επιφάνεια του συρμάτινου βρόχου. Θεωρώντας ότι η μαγνητική ροή διαμέσου του βρόχου οφείλεται εξ' ολοκλήρου στο μαγνητικό πεδίο του αγωγού, θα ισχύει ότι:

$$\Phi_B = \int_{\beta\rho\acute{o}\chi o} \vec{B}\cdot d\vec{A} \quad 0.25 \quad = \int_{\beta\rho\acute{o}\chi o} B\, dA \Rightarrow$$ (θεωρώντας τα $\vec{B}$ κ $d\vec{A}$ συγγραμ.)

$$\Phi_B = \int_{r-b/2}^{r+b/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r'}\, a\, dr' \quad 0.25.$$

(όπου dA η στοιχειώδης επιφάνεια που φαίνεται στο σχήμα, εμβαδού $a\,dr'$)

όπου r είναι η θέση του κέντρου του βρόχου. Άρα:

$$\Phi_B(r) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{r-b/2}^{r+b/2} \frac{dr'}{r'} \Rightarrow \Phi_B(r) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{r+b/2}{r-b/2}\right).$$

Για $r = 1.5b = 1.2\ \text{cm}$, έχουμε:

$$\Phi_B(r) = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Tm/A})\ 467\,\text{A}(0.022\,\text{m})}{2\pi} \ln\left(\frac{1.2+0.4}{1.2-0.4}\right) = 1.4 \times 10^{-6}\ \text{Wb}. \quad 0.25$$

(β). Καθώς ο συρμάτινος βρόχος απομακρύνεται από τον αγωγό με σταθερή ταχύτητα, η μαγνητική ροή μεταβάλλεται (ελαττώνεται) και άρα στα άκρα του εμφανίζεται ΗΕΔ εξ' επαγωγής για την οποία ισχύει (νόμος Faraday):

$$|\mathcal{E}| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| \Rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{r+b/2}{r-b/2}\right)$$

0.5

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d \ln\left(\frac{r+b/2}{r-b/2}\right)}{d[(r+b/2)/(r-b/2)]} \cdot \frac{d[(r+b/2)/(r-b/2)]}{dt} =$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \cdot \frac{r-b/2}{r+b/2} \cdot \left(\frac{v}{r-b/2} - \frac{r+b/2}{(r-b/2)^2} \cdot v\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left(\frac{v}{r+b/2} - \frac{v}{r-b/2}\right) = \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi} \frac{1}{[r^2-(b/2)^2]}$$

0.5

Για $r = 1.5b = 1.2cm$, έχουμε:

$$|\mathcal{E}| = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A)\ 467A\ (0.022m)}{2\pi} \cdot \frac{0.008\ m\ \ 3.2 \times 10^{-3} \frac{m}{s}}{\left[(0.012m)^2 - \left(\frac{0.008}{2}\right)^2\right]} \Rightarrow$$

$|\mathcal{E}| = 4.1 \times 10^{-7}\ V.$ 0.25

Οπότε, το ρεύμα στο συρμάτινο βρόχο θα είναι:

$$I = \left|\frac{\mathcal{E}}{R}\right| = \frac{4.1 \times 10^{-7}\ V}{4 \times 10^{-4}\ \Omega} = 1mA.$$

0.25