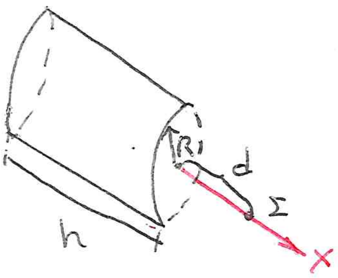
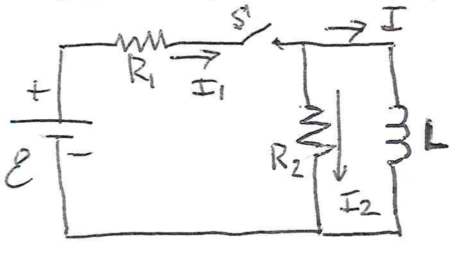
# ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΦΙΙ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ ΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ, Ι. ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ

**1ο Θέμα:** **α)** Ένα ομοιόμορφα φορτισμένο κυλινδρικό κέλυφος με ανοιχτές βάσεις έχει συνολικό φορτίο $Q$, ακτίνα $R$ και μήκος $h$. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο που απέχει απόσταση $d$ από το άκρο του κελύφους **(1)**. **β)** Λύστε το ίδιο πρόβλημα για ένα συμπαγή κύλινδρο **(1)**. (Δίνεται ότι το δυναμικό ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου, φορτίου $Q$ και ακτίνας $R$, σε σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $x$ από το κέντρο του δακτυλίου πάνω στον κάθετο κεντρικό του άξονα, είναι ίσο με: $V=k_eQ/(R^2+x^2)^{1/2}$. Το δυναμικό ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου, επιφανειακής πυκνότητας φορτίου $\sigma$ και ακτίνας $R$, σε σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $x$ από το κέντρο του δίσκου πάνω στον κάθετο κεντρικό του άξονα, είναι ίσο με: $V=2\pi k_e\sigma[(R^2+x^2)^{1/2}-x]$.)



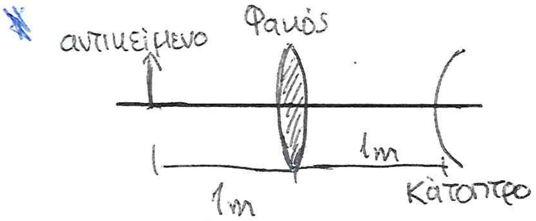

**2ο Θέμα:** Τη χρονική στιγμή $t=0$ κλείνουμε τον ανοικτό διακόπτη του κυκλώματος που φαίνεται στην εικόνα. Θέλουμε να βρούμε μία σχέση που να δίνει το ρεύμα στο πηνίο όταν $t>0$.



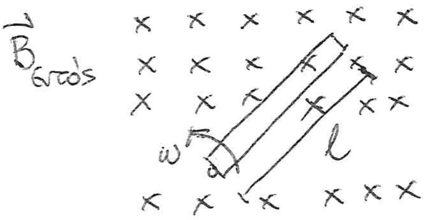

Συμβολίζουμε αυτό το ρεύμα με $I$ και θεωρούμε ότι διαρρέει το πηνίο με φορά προς τα κάτω. Έστω ότι $I_1$ είναι το ρεύμα με φορά προς τα δεξιά στον αντιστάτη $R_1$ και $I_2$ είναι το ρεύμα με φορά προς τα κάτω στον αντιστάτη $R_2$. Δείξτε ότι:

$$I(t)=\frac{E}{R_1}[1-e^{-(R'/L)}t] \quad , \text{ όπου } R'=R_1R_2/(R_1+R_2) \quad \mathbf{(2.5)}$$

**3ο Θέμα:** Ο φακός και το κάτοπτρο της εικόνας βρίσκονται σε απόσταση d=1m μεταξύ τους και έχουν εστιακές αποστάσεις +80cm και -50cm αντίστοιχα. Ένα αντικείμενο τοποθετείται σε απόσταση P=1m αριστερά από το φακό. **α)** Βρείτε τη θέση του τελικού ειδώλου το οποίο σχηματίζεται από φως που έχει διέλθει δύο φορές από το φακό**(1.5)**. **β)** Βρείτε τη συνολική μεγένθυση του ειδώλου. Είναι όρθιο ή ανεστραμμένο; **(0.5)**




**4ο Θέμα:** Μία αγώγιμη ράβδος μήκους $\ell$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα σταθερού μέτρου $\omega$ ως προς ένα άξονα κάθετο σ' ένα από τα άκρα της. Υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ κάθετο στο επίπεδο περιστροφής, όπως φαίνεται στην εικόνα. Βρείτε την ΗΕΔ που επάγεται, λόγω κίνησης, μεταξύ των άκρων της ράβδου. (1.5). Αν θέλετε να αυξήσετε την ΗΕΔ θα αυξήσετε το μαγνητικό πεδίο, το μήκος της ράβδου ή το ω, και γιατί; **(0.5)**




**5ο Θέμα:** Υποθέστε λεπτό φακό εστιακής απόστασης $f$ και ότι ένα αντικείμενο έχει πάχος $dp$, το οποίο εκτείνεται από το σημείο $p$ έως το σημείο $p+dp$, όπου $p$ είναι η απόσταση του αντικειμένου. **α)** Αποδείξτε ότι το πάχος $dq$ του ειδώλου του δίνεται από τη σχέση $(-q^2/p^2)dp$ **(1)**. **β)** Η διαμήκης μεγένθυση του αντικειμένου ορίζεται ως $M_{διαμ.}=dq/dp$. Πως σχετίζεται η διαμήκης μεγένθυση με την εγκάρσια μεγένθυση $M$; **(0.5)**

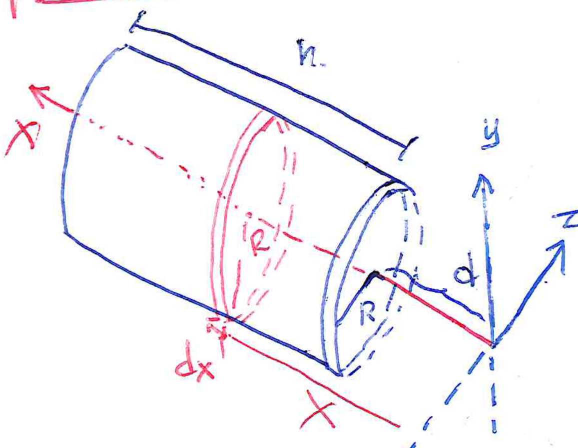
---

Δίνονται: $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ Tm/A, $\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ $(C^2/N)m^2$, $V(r)=k_e(dq/r)$, $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$, $u_b=B^2/2\mu_0$,

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q_{μεσα}}{\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{F}_B=q\vec{u}\times\vec{B} \quad , \quad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad , \quad \oint \vec{B}\,d\vec{s}=\mu_0 I \quad \int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

# ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ.

## 1ο Θέμα




(α) Θεωρώ το κυλινδρικό κέλυφος ότι αποτελείται από δακτυλίους, ομοιόμορφα φορτισμένους, με ακτίνα R, πάχους dx, φορτίο $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi R dx \ \left(\sigma = \frac{Q}{2\pi R h}\right) = \frac{Q}{h}dx$.

Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Σ, dV, του καθενός δακτυλίου είναι:

$$dV = \frac{k_e dq}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

όπου x η απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο του κάθε δακτυλίου. Άρα, το συνολικό δυναμικό του κυλινδρικού κελύφους θα είναι:

$$V = \int dV = \int_d^{d+h} \frac{k_e}{\sqrt{x^2+R^2}}\,\frac{Q}{h}\,dx \Rightarrow$$

0.5

$$V = \int_d^{d+h} \frac{k_e Q}{h}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{k_e Q}{h}\ln\left(x+\sqrt{x^2+R^2}\right)\Big|_d^{d+h} \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \frac{k_e Q}{h}\ln\left[\frac{d+h+\sqrt{(d+h)^2+R^2}}{d+\sqrt{d^2+R^2}}\right]}.$$

0.5

(β) Με την ίδια λογική, θεωρώ ότι ο συμπαγής κύλινδρος, χωρικής πυκνότητας $\rho = \frac{Q}{\pi R^2 h}$, αποτελείται από στοιχειώδεις δίσκους, ακτίνας R, πάχους dx, και φορτίου $dq = \rho \pi R^2 dx \Rightarrow dq = \frac{Q}{h}dx$. Στο όριο $dx \to 0$, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του κάθε στοιχειώδη δίσκου είναι: $\frac{Q}{\pi R^2 h}dx$. Άρα, το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Σ, dV, του καθενός δίσκου είναι:

$$dV = 2\pi k_e \frac{Q\,dx}{\pi R^2 h}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right).$$

Άρα, το συνολικό δυναμικό του συμπαγούς κυλίνδρου θα είναι:

$$V = \int dV = \underbrace{\int_d^{d+h} \frac{2k_eQ}{R^2h}\left(\sqrt{x^2+R^2}\,dx - x\,dx\right)}_{0.5} \Rightarrow$$

$$V = \frac{2k_eQ}{R^2h}\left[\int_d^{d+h}\sqrt{x^2+R^2}\,dx - \int_d^{d+h} x\,dx\right] \Rightarrow$$

$$V = \frac{2k_eQ}{R^2h}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{R^2+x^2} + \frac{1}{2}R^2\ln\left(\sqrt{R^2+x^2}+x\right)\Big|_d^{d+h} - \frac{1}{2}x^2\Big|_d^{d+h}\right] \Rightarrow$$

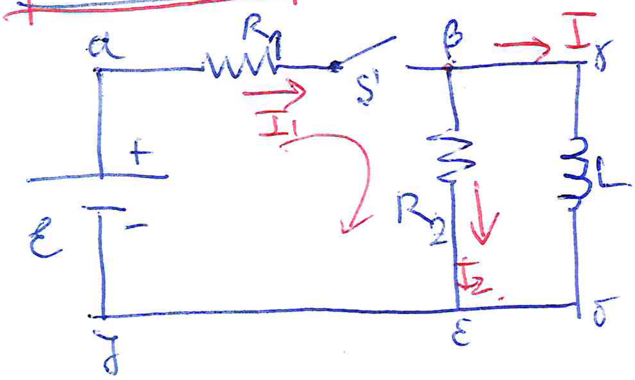
$$V = \frac{2k_eQ}{R^2h}\left[\frac{1}{2}(d+h)\sqrt{R^2+(d+h)^2} + \frac{1}{2}R^2\ln\left(\sqrt{R^2+(d+h)^2}+d+h\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}d\sqrt{R^2+d^2} - \frac{1}{2}R^2\ln\left(\sqrt{R^2+d^2}+d\right) - \frac{1}{2}(d+h)^2 + \frac{1}{2}d^2\right] \Rightarrow$$

$$V = \frac{k_eQ}{R^2h}\left[(d+h)\sqrt{R^2+(d+h)^2} - d\sqrt{R^2+d^2} - 2dh - h^2 + R^2\ln\left(\frac{d+h+\sqrt{R^2+(h+d)^2}}{d+\sqrt{d^2+R^2}}\right)\right]$$

0.5

## 2ο θέμα




1ος κανόνας Kirchhoff στον κόμβο

$\boxed{\beta: \quad I_1 = I + I_2}$ (1).

2ος κανόνας Kirchhoff στον βρόχο αβεγ:

$$\boxed{\mathcal{E} - I_1R_1 - I_2R_2 = 0 \ (2).}$$

2ος κανόνας Kirchoff στον βρόχο: αγδγ:

$$\boxed{\mathcal{E} - I_1R_1 - L\frac{dI}{dt} = 0} \ (3)$$

0.5

(i) Λύνω την εξίσωση (2) ως προς $I_1$:

$$\mathcal{E} - I_1R_1 - (I_1 - I)R_2 = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - I_1R_1 - I_1R_2 + IR_2 = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} + IR_2}{R_1 + R_2} \ (4).$$

(ii) Αντικαθιστώ την (4) στην (3) έχω:

$$\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E} + IR_2}{R_1 + R_2}R_1 - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1 + R_2}}_{\mathcal{E}'} - I\underbrace{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}_{R'} - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow$$

1.0

$$\mathcal{E}' - IR' - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E}' - IR' \Rightarrow$$

$$\frac{dI}{\mathcal{E}' - IR'} = \frac{1}{L}dt \Rightarrow \int_0^I \frac{d(\mathcal{E}' - IR')}{\mathcal{E}' - IR'} = -\frac{R'}{L}\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln(\mathcal{E}' - IR')\Big|_0^I = -\frac{R'}{L}t \Rightarrow \ln\frac{\mathcal{E}' - IR'}{\mathcal{E}'} = -\frac{R'}{L}t \Rightarrow$$

$$1 - \frac{IR'}{\mathcal{E}'} = e^{-\frac{R'}{L}t} \Rightarrow \frac{IR'}{\mathcal{E}'} = 1 - e^{-R'/L\,t} \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}'}{R'}\left(1 - e^{-R'/L\,t}\right).$$

Όμως: $\frac{\mathcal{E}'}{R'} = \frac{\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}R_1}{(R_1 + R_2)}}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2) - \mathcal{E}R_1}{R_1R_2} = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$, άρα:

$$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}\left(1 - e^{-R't/L}\right).}$$

1.0

3ο Θέμα. Λυμένη άσκηση (άσκηση 3, 14ο φυλλάδιο ασκήσεων).

4ο Θέμα: Παράδειγμα Η9.4 βιβλίου Serway/Jewett.

5ο Θέμα.

(α) Σύμφωνα με την εξίσωση των λεπτών φακών:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \text{ ή } p^{-1}+q^{-1}=f^{-1}.$$

Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση ως προς p, θα πάρουμε:

$$\frac{dp^{-1}}{dp}+\frac{dq^{-1}}{dp}=0$$ (f είναι η εστιακή απόσταση του φακού, που είναι σταθερή ποσότητα).

Άρα: $$\frac{dp^{-1}}{dp}+\frac{dq^{-1}}{dq}\frac{dq}{dp}=0 \Rightarrow -\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\frac{dq}{dp}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{dp}=-\frac{q^2}{p^2} \Rightarrow \boxed{dq=-\frac{q^2}{p^2}dp.}$$ 1.0

(β) $$M_{διαμ.}=\frac{dq}{dp}=-\left(\frac{q}{p}\right)^2, \text{ και } M=-\frac{q}{p}, \text{ άρα:}$$

$$\boxed{M_{διαμ}=-M^2}$$ 0.5