<u>ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΦΙΙ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2020</u>

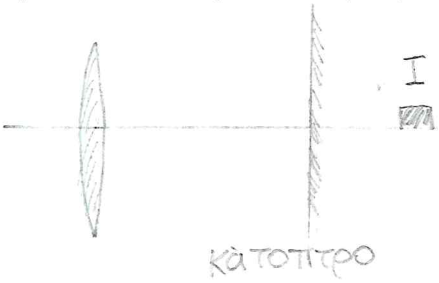
ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ ΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ. ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΙ ΝΑ ΓΡΑΨΕΤΕ ΚΑΛΑ, Ι. ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ.

<u>1ο Θέμα:</u> Υποθέστε κύκλωμα *RL*, με το πηνίο αυτεπαγωγής *L* και τον αντιστάτη *R* συνδεδεμένα σε σειρά με μπαταρία. Υποθέστε ότι η ΗΕΔ της μπαταρίας μεταβάλλεται με τον χρόνο έτσι ώστε το ρεύμα στο κύκλωμα να δίνεται από τη σχέση $I(t)=3+5t$ (όπου το ρεύμα δίνεται σε ampere και το t σε δευτερόλεπτα). Βρείτε μια έκφραση για την ΗΕΔ της μπαταρίας ως συνάρτηση του χρόνου ($R=4\ \Omega$ και $L=6\ H$). **(2)**

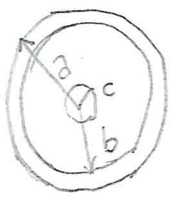
<u>2ο Θέμα:</u> Θετικό φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στον όγκο ενός συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας *R*, με άπειρο μήκος. Αν ρ είναι η (σταθερή) πυκνότητα φορτίου στον κύλινδρο, να βρείτε το το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση $r<R$ και $r>R$. **(2)**

<u>3ο Θέμα:</u> Υποθέστε ότι τα όριο του ορατού φάσματος είναι τα *430* και τα *680 nm*. Υπολογίστε τον *αριθμό χαραγών ανά mm* ενός φράγματος περίθλασης που διαχέει το φάσμα πρώτης τάξης κατά μία γωνία 20 μοιρών. **(1.5)**

<u>4ο Θέμα:</u> Στο παρακάτω σχήμα ένα κουτί είναι κάπου στ' αριστερά του συγκλίνοντος, λεπτού φακού (πάνω στον κεντρικό του άξονα). Το είδωλο του κουτιού (*I*) που παράγεται από το επίπεδο κάτοπτρο βρίσκεται *4cm* "εντός" αυτού. Η απόσταση μεταξύ φακού και κατόπτρου είναι *10cm* και η εστιακή απόσταση του φακού είναι *2cm*. **α)** Ποια είναι η απόσταση μεταξύ του κουτιού και του φακού; **β)** Το φως που ανακλάται από το κάτοπτρο διαδίδεται μέσα από το φακό ο οποίος και παράγει ένα τελικό είδωλο του κουτιού. Ποια η απόσταση μεταξύ του φακού και του τελικού ειδώλου; **(1.5) γ)** Το τελικό αντικείμενο είναι όρθιο ή ανεστραμμένο, πραγματικό ή φανταστικό, μικρότερο ή μεγαλύτερο από το αντικείμενο; **(0.5)**



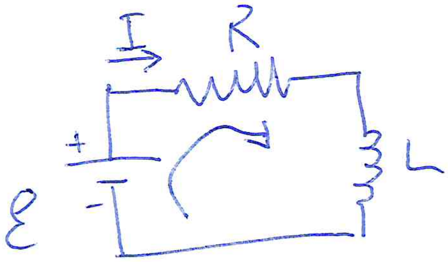
<u>5ο Θέμα:</u> Το σχήμα δείχνει μία διατομή ενός αγώγιμου, ομοαξονικού καλωδίου μεγάλου μήκους και δίνει τις ακτίνες του (*a*, *b* και *c*). Ίσα αλλά αντίθετης κατεύθυνσης ρεύματα, *I*, κατανέμονται ομοιόμορφα στους δύο αγωγούς. **α)** Να βρείτε μαθηματικές εκφράσεις για το μέτρο του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση $r\le c$, $c<r\le b$, $b<r\le a$ και $r>a$. **(2) β)** Υποθέστε ότι $a=2cm$, $b=1.8cm$, $c=0.4cm$ και $I=120\ A$. Κάνετε τη γραφική παράσταση της $B(r)$ στην περιοχή $0\le r\le 3\ cm$. **(0.5)**



Δίνονται: $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ Tm/A, $\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ $(C^2/N)m^2$, $e=1.602\times10^{-19}$ C, $V(r)=k_e(dq/r)$, $d\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$,

$u_b=B^2/2\mu_0$, $\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\dfrac{Q_{εντός}}{\varepsilon_0}$, $\vec{F}_B=q\vec{u}\times\vec{B}$, $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $\oint\vec{B}\,d\vec{s}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{d\Phi_E}{dt}$, $1/f=(n-1)(1/R_1-1/R_2)$, $\sin(\theta_{σκοτ})=(m+0.5)\lambda/d$, $\sin(\theta_{σκοτ})=m\lambda/a$, $\sin(\theta_{φωτ})=m\lambda/d$, $U=(1/2)C\Delta V^2$, $U=(1/2)LI^2$, $\sin(\theta+\Delta\theta)=\sin(\theta)\cos(\Delta\theta)+\cos(\theta)\sin(\Delta\theta)$

1ο ΘΕΜΑ. Το κύκλωμα φαίνεται παρακάτω:



Είναι ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RL, σε σειρά.

Σύμφωνα με τον κανόνα των βρόχων θα ισχύει:

$$\mathcal{E} - IR - L\left(\frac{dI}{dt}\right) = 0 \quad (1)$$

1.0

Σύμφωνα με την άσκηση, το ρεύμα στο κύκλωμα μεταβάλλεται με το χρόνο ως:

$I(t) = 3 + 5t$ (μονάδες SI), οπότε:

$$\frac{dI(t)}{dt} = 5\,A/s \quad (2)$$

0.5

Αντικαθιστώ τη (2) στην (1) κι έχω:

$$\mathcal{E} = IR + L\frac{dI}{dt} = (3+5t)R + L\cdot 5$$

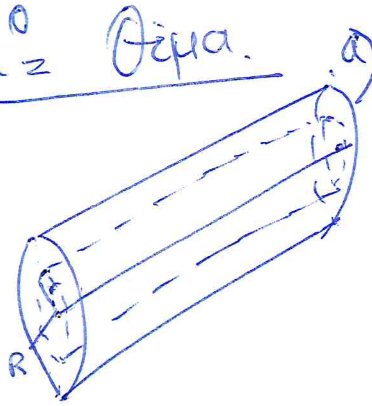
$$\mathcal{E} = 4\Omega\,[3A + (5t)A] + 6H \cdot 5\,A/s \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = [12 + 20t + 30]\,V \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = (42 + 20t)\,V \quad (t \text{ σε sec}).$$

0.5

2^{o} Θέμα.



α) Θεωρώ κλειστή επιφάνεια Gauss εντός του κυλίνδρου, που ταυτίζεται με την επιφάνεια ενός κυλίνδρου ακτίνας r $(r < R)$, και μήκους l, που έχει τον ίδιο κεντρικό άξονα με τον αρχικό κύλινδρο.
Έστω Φ_c η ολική ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσω αυτής της επιφάνειας.

Με βάση το νόμο του Gauss, θα ισχύει:

$$\Phi_c = \frac{Q_{εντός}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

όπου $Q_{εντός}$ είναι το ολικό φορτίο εντός της επιφάνειας.

0.5

Λόγω γεωμετρίας, οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου θα εκτείνονται ακτινικά προς τα έξω, κάθετα στην κυλινδρική επιφάνεια, σε κάθε σημείο της. Η τιμή του πεδίου θα είναι επίσης η ίδια σε κάθε σημείο της επιφάνειας. Άρα:

$$\Phi_c = \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{A} = \underbrace{\int E\, dA}_{\text{επειδή τα } \vec{E} \text{ και } d\vec{A} \text{ συγγραμμικά}} = \overbrace{E\int dA}^{\text{επειδή το πεδίο ίσο σε κάθε σημείο της επιφάνειας}} \Rightarrow$$

$$\Phi_c = E\, \underline{2\pi r l} \quad (2)$$

το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας.
Το πεδίο είναι κάθετο στα $d\vec{A}$, σε κάθε σημείο στις δύο βάσεις αυτής της επιφάνειας.

0.25

Δ' ότι αφορά το $Q_{εντός}$, δεδομένου ότι το φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στον όγκο του κυλίνδρου, θα ισχύει:

$Q_{εντός} = \rho V$ όπου ρ = η πυκνότητα φορτίου ⁊ V ο όγκος του κυλίνδρου.

0.25

Άρα: $Q_{εντός} = \rho \pi r^2 l$ (3). Λόγω των (2) ⁊ (3) η (1) μας δίνει:

$$E 2\pi r \cancel{l} = \frac{\rho \pi r^2 \cancel{l}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}}, \text{ για } r < R,$$

ή $\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$, σε μορφή διανύσματος.

0.5

β). Για $r > R$, θεωρώ επιφάνεια Gauss που είναι κυλινδρική, έχει ακτίνα r και μήκος l. Η εξίσωση (2) για αυτή την των επιφάνεια γίνεται:

$$\Phi_E = E 2\pi r l, \quad r > R \ (3)$$

Το φορτίο εντός αυτής της επιφάνειας είναι το φορτίο του συμπαγούς κυλίνδρου, ακτίνας R ⁊ μήκους l. Δηλ:

$Q_{εντός} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot l$ (4). Λόγω των (4) ⁊ (3), η (1) μας δίνει:

$$E 2\pi r \cancel{l} = \frac{\rho \pi R^2 \cancel{l}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, \text{ και:}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}}$$

0.5

3ο Θέμα

Για φράγμα περίθλασης, η συνθήκη των μεγίστων συμβολής ικανοποιεί τη σχέση:

0.25.

$$d \sin\theta_{φωτ} = m\lambda,$$ όπου d είναι η απόσταση μεταξύ των σχισμών. Η άσκηση αναφέρεται σε φάσμα πρώτης τάξης, άρα $m=1$. $\theta_{φωτ}$ είναι η γωνία ανάμεσα στην κάθετη στο φράγμα περίθλασης στο κέντρο του & στην ευθεία που ενώνει το φράγμα με το πρώτο φωτεινό κροσσό (στην περίπτωσή μας φωτεινή, φασματική γραμμή).

Η άσκηση αναφέρεται στα μήκη κύματος $\lambda_1 = 430\,nm$ & $\lambda_2 = 680\,nm$. Έστω $\theta_{φωτ,1}$ η γωνιακή θέση της γραμμής που αντιστοιχεί στο λ_1, & $\theta_{φωτ,1}+\Delta\theta$ η γωνιακή θέση της γραμμής που αντιστοιχεί στο λ_2. Η άσκηση μας ζητάει να βρούμε το d όταν $\Delta\theta = 20°$.

- Έχουμε λοιπόν:

$$\lambda_1 = d \sin\theta_{φωτ,1} \quad (1)$$

0.25.

$$\lambda_2 = d \sin(\theta_{φωτ,1} + \Delta\theta) \quad (2)$$

Δεδομένου ότι $\sin(\theta+\Delta\theta) = \sin\theta \cos(\Delta\theta) + \cos\theta \cdot \sin(\Delta\theta)$, η (2) γράφεται:

$$\frac{\lambda_2}{d} = \sin\theta_{φωτ,1} \cos(\Delta\theta) + \cos\theta_{φωτ,1} \sin(\Delta\theta) = \frac{\lambda_1}{d}\cos(\Delta\theta) + \cos\theta \sin(\Delta\theta) \quad (3)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι

$\sin\theta_{φωτ,1} = \frac{\lambda_1}{d}$ (από την (1)). Επίσης:

$$\cos^2\theta_{φωτ,1} = 1 - \sin^2\theta_{φωτ,1} = 1 - \left(\frac{\lambda_1}{d}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\cos^2\theta_{φωτ,1} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{d}\right)^2} \quad (4).$$

Άρα η (3) γράφεται:

0.5

$$\frac{\lambda_2}{d} = \frac{\lambda_1}{d}\cos(\Delta\theta) + \sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{d}\right)^2}\,\sin(\Delta\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda_2}{d} = \frac{\lambda_1}{d}\cos(\Delta\theta) + \sqrt{d^2-\lambda_1^2}\,\frac{\sin(\Delta\theta)}{d} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \lambda_1\cos(\Delta\theta) + \sqrt{d^2-\lambda_1^2}\,\sin(\Delta\theta) \Rightarrow$$

$$\sqrt{d^2-\lambda_1^2} = \frac{\lambda_2-\lambda_1\cos(\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} \Rightarrow d^2 = \lambda_1^2 + \frac{(\lambda_2-\lambda_1\cos\Delta\theta)^2}{\sin^2\Delta\theta} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1\cos\Delta\theta)^2 + (\lambda_1\sin(\Delta\theta))^2}{\sin^2(\Delta\theta)}} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\frac{[680\,nm - (430\,nm)\cdot\cos 20^\circ]^2 + [(430\,nm)\cdot\sin 20^\circ]^2}{\sin^2 20^\circ}} \Rightarrow$$

0.5

$d = 914\,nm = 9.14\times10^{-4}\,mm \Rightarrow$ υπάρχουν $\frac{1}{d} = 1.1\times10^{3}$ γραμμές/mm.

7ο Θέμα.

α) Έστω p_1 η απόσταση μεταξύ κεριού & φακού. Και έστω q_1 η απόσταση του ειδώλου του κεριού, που σχηματίζει ο φακός. Ισχύει:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f} \quad (1),$$ όπου $f=+2cm$ (ο φακός είναι συγκλίνων)

0.5

και $10-q_1=4cm \Rightarrow q_1=6cm$ (2).

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από το γεγονός ότι το είδωλο του φακού θα είναι το αντικείμενο για τον καθρέφτη, και $p=q$ (σε απόλυτη τιμή) για τα επίπεδα κάτοπτρα. Για $f=+2cm$, & $q_1=+6cm$, η (1) γράφεται:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{p_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p_1}=\frac{4}{12} \Rightarrow p_1=3cm.$$

0.5

β) Το είδωλο του καθρέφτη (στα 4cm "εντός" αυτού) είναι το αντικείμενο του φακού (στη θέση $p_2=10+4=14cm$) όταν το φως ανακλάται από το κάτοπτρο και διαδίδεται μέσα από το φακό, για δεύτερη φορά. Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει:

0.5

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{14}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{q_2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{14}=\frac{12}{28} \Rightarrow$$

$q_2=2.33$ cm.

Άρα, η απόσταση του τελικού ειδώλου είναι

2.3 cm στα αριστερά του φακού.

γ). Η μεγένθυση, M_1, για το πρώτο είδωλο, καθώς το φως αρχικά διέρχεται από τα αριστερά προς τα δεξιά είναι:

$$M_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{6}{3} = -2$$

Η μεγένθυση για το επίπεδο κάτοπτρο είναι $M_2 = 1$.

Για τη δεύτερη δίοδο του φωτός από τον φακό:

$$M_3 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{2.33}{14} = -0.17.$$

0.25

Άρα, η ολική μεγένθυση του ειδώλου είναι:

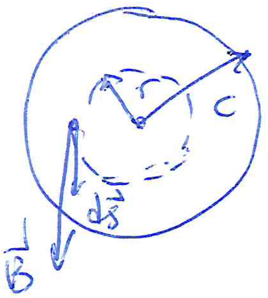
$$M_{ολ} = M_1 M_2 M_3 = +0.33.$$

Το τελικό είδωλο είναι μικρότερο από το αντικείμενο, όρθιο ($M_{ολ} > 0$) & πραγματικό ($q_2 > 0$).

0.25

$5^{\underline{o}}$ Θέμα

1) Περίπτωση $r \leq c$:



Θεωρώ κύκλο ακτίνας $r<c$, στον εσωτερικό αγωγό. Πάνω σ' αυτό τον κύκλο ισχύει ο νόμος του Ampere:

$$\oint_{c'} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_r \,, \quad (1)$$

0.25

όπου I_r είναι το ρεύμα που διαρρέει το τμήμα του εσωτερικού αγωγού, ακτίνας $r<c$. Αφού το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα στον αγωγό, θα ισχύει:

$$\frac{I_r}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi c^2} \Rightarrow I_r = \frac{r^2}{c^2} I. \quad (2)$$

Λόγω συμμετρίας, τα $\vec{B}$ & $d\vec{s}$ είναι ομόρροπα πάνω στον κύκλο ακτίνας r, και το μέτρο του $\vec{B}$ σταθερό. Άρα το αριστερό τμήμα της (1) γράφεται:

$$\oint_{c'} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint_{c} B\,ds = B\oint_{c} ds = 2\pi r B \quad (3).$$

Λόγω των (2) & (3), η (1) μας δίνει:

0.5

$$B\,2\pi r = \mu_0 \frac{I r^2}{c^2} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi c^2} \quad (4 \quad (r \leq c)).$$

2). Διαλέγω κύκλο ακτίνας r στην περιοχή των δύο αγωγών $(c<r\leq b)$. Σ' αυτό τον κύκλο θα ισχύει & πάλι ο νόμος του Ampere, με το πρώτο μέρος

να δίνεται B πάλι από την εξ (3). Άρα τώρα:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (5),$$ όπου I το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τον εσωτερικό αγωγό.

$c < r \leq b$.

0.25

3). Έστω τώρα κύκλος ακτίνας r, μέσα στον εξωτερικό αγωγό. Λόγω συμμετρίας το $\vec{B}$ σε κάθε σημείο του κύκλου συνεχίζει να είναι εφαπτομενικό του $d\vec{s}$ και να έχει το ίδιο μέτρο. Άρα, ο νόμος του Ampere γράφεται ως εξής:

$$B 2\pi r = \mu_0 (I - I'_r), \quad (6)$$

όπου I είναι το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τον εσωτερικό αγωγό (που το θεωρούμε θετικό). Το I'_r είναι το (αρνητικό) ρεύμα που διαρρέει τον εξωτερικό αγωγό, στην επιφάνεια του από b έως r. Λόγω του ότι το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα, & το συνολικό ρεύμα του εξωτερικού αγωγού είναι I, θα ισχύει:

$$\frac{I'_r}{I} = \frac{\pi(r^2-b^2)}{\pi(a^2-b^2)} \Rightarrow I'_r = \frac{(r^2-b^2)}{(a^2-b^2)} I \quad (7).$$

Λόγω της (7) η (6) γράφεται ως:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left[I - I\frac{(r^2-b^2)}{(a^2-b^2)}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-b^2}\right) \quad (8).$$

$b < r \leq a$.

4). Σε οποιαδήποτε απόσταση έξω από το ομοαξονικό καλώδιο, ισχύει:

$$B(r) = 0, \quad \text{αφού} \quad I_{ολ} = I - I = \phi .$$

(οι αγωγοί, όπως μας λέει η άσκηση διαρρέονται από ρεύματα αντίθετης κατεύθυνσης). 0.5

β). Για $a = 2cm$, $b = 1.8cm$, $c = 0.4cm$ και $I = 120A$, οι εξισώσεις (4), (5), και (8) γράφονται ως εξής:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi c^2} = \frac{\cancel{4\pi}^{2}\times 10^{-7}\, 120}{\cancel{2\pi}\,(0.4\times 10^{-2})^2}\, r = 1.5\, r \ (T) \quad (9)$$

$r \leq 0.004\,m$. (r in meters). Το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται γραμμικά με την απόσταση r από το κέντρο. Και συνέχεια:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{2\times 10^{-7}\times 120}{r(m)} = \frac{2.4\times 10^{-5}}{r(m)}\ (T) . \quad (10)$$

$0.004\,m < r \leq 0.018\,m$. Το μαγνητικό πεδίο ελαττώνεται ως $\frac{1}{r}$.

0.25

Και:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}\right)\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{2\times 10^{-7}\times 120}{r\cdot 10^{4}}\left(\frac{4\times 10^{-4} - r^2}{4 - 3.24}\right) = 0.32\left(\frac{4\times 10^{-4}}{r} - r\right)(T) \quad (11)$$

$0.018m < r \leq 0.02m$. Και:

$$B(r) = \phi, \quad B > 0.02\ m. \quad (12)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις (9,10,11+12), υπολογίζω:

$r = 0\ m$, $B(r=0) = 0$.

$r = 0.004 m$, $B(r) = 0.006\ T$.

$r = 0.018 m$, $B(r) = 1.3 \times 10^{-3}\ T$.

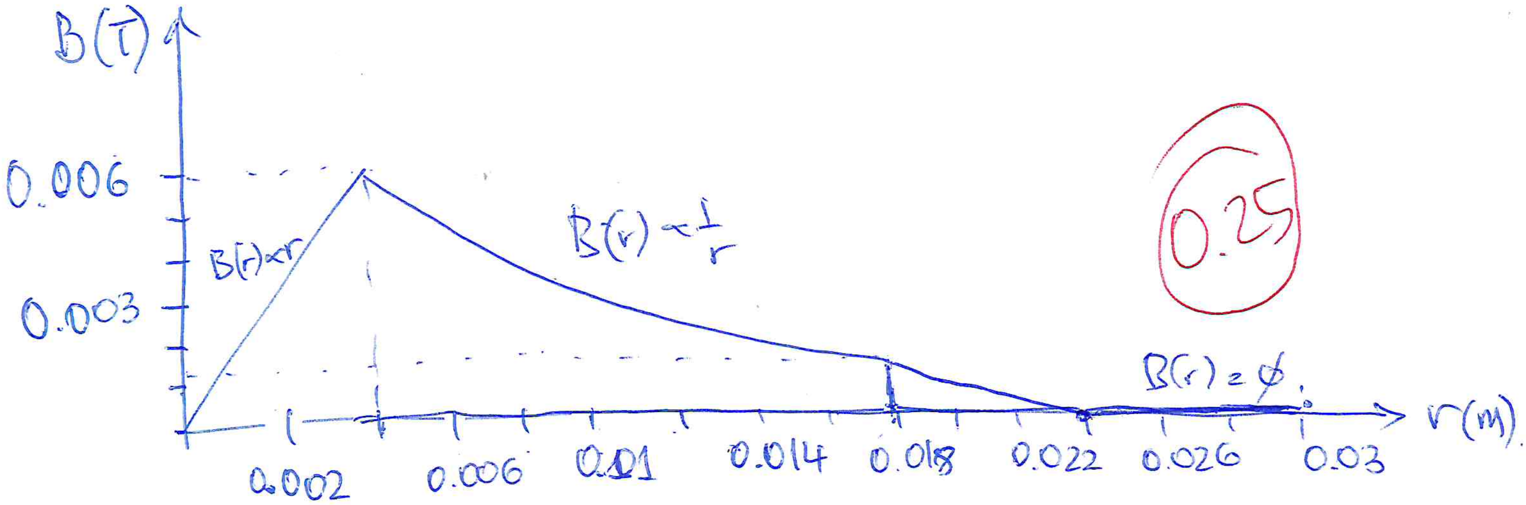
$r = 0.02 m$, $B(r) = 0$.

$B \propto r$

$B \propto 1/r$.

$\therefore B$ ελαττώνεται με το r.

Και κατασκευάζω το διάγραμμα:



0.25