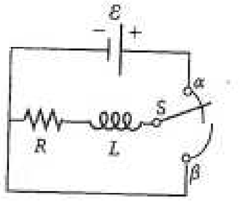
ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΦΙΙ ΙΟΥΝΙΟΥ 2015: ΘΕΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

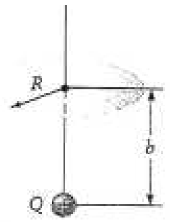
ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ ΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ, Ι. ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ.

1ο Θέμα: **α)** Θεωρείστε κύκλωμα με ΗΕΔ E, διακόπτη S, αντιστάτη R και πηνίο L, συνδεδεμένα στη σειρά (κύκλωμα RL). Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ κλείνουμε το διακόπτη. Δείξτε ότι η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα αυξάνεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση: $I(t)= \frac{E}{R}\,[1- e^{(-t/\tau)}]$, όπου τ η "σταθερά χρόνου" του κυκλώματος ($\tau=L/R$) Δώστε το γράφημα της μεταβολής του ρεύματος με το χρόνο γι' αυτό το κύκλωμα. **(2)**.

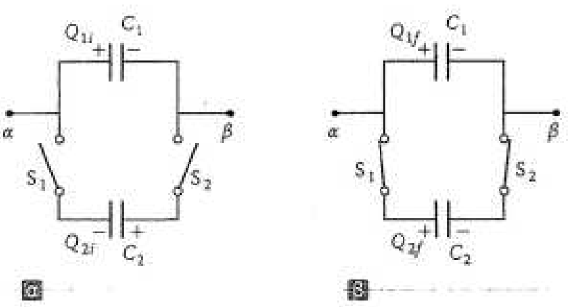


Ένα πηνίο 140 mH και ενας αντιστάτης 4,9 Ω συνδέονται μέσω ενός διακόπτη με μία μπαταρία 6V. **β)** Αφού θέσουμε το διακόπτη στη θέση (α) (οπότε η μπαταρία είναι συνδεδεμένη στο κύκλωμα), πόσος χρόνος θα περάσει μέχρι το ρεύμα να φτάσει τα 220 mA; **(1)** **γ)** Ο διακόπτης μένει στη θέση (α) για 10s. Αμέσως μετά, θέτουμε ακαριαία τον διακόπτη από τη θέση (α) στη θέση (β). Πόσος χρόνος θα περάσει μέχρι να μειωθεί το ρεύμα στα 160 mA; **(1)**

2ο Θέμα: Ένα σωματίδιο με φορτίο Q βρίσκεται στον άξονα ενός κύκλου ακτίνας R σε απόσταση b από το επίπεδο του κύκλου. Δείξτε ότι αν το ένα τέταρτο της ηλεκτρικής ροής που δημιουργεί το φορτίο διέρχεται από τον κύκλο, τότε $R=b\sqrt{3}$. **(3)**



3ο Θέμα: Φορτίζουμε δύο πυκνωτές C_1 και C_2 (όπου $C_1>C_2$) στην <u>ίδια διαφορά δυναμικού</u> ΔV_i. Κατόπιν αποσυνδέουμε τους φορτισμένους πλέον πυκνωτές από τη μπαταρία και συνδέουμε τους οπλισμούς τους με αντίστροφη πολικότητα (όπως στην εικόνα). Στη συνέχεια, κλείνουμε τους διακόπτες S_1 και S_2.

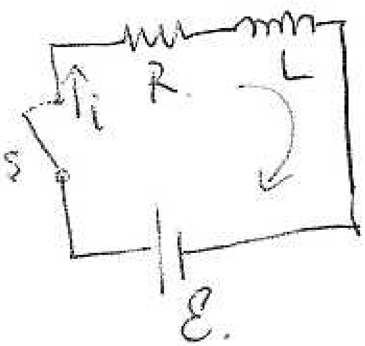


α) Βρείτε την τελική διαφορά δυναμικού ΔV_f μεταξύ των άκρων α και β μετά το κλείσιμο των διακοπτών **(1)**. **β)** Βρείτε τη συνολική ενέργεια που αποθηκεύεται στους πυκνωτές πριν και μετά το κλείσιμο των διακοπτών και προσδιορίστε το λόγο της τελικής ενέργειας προς την αρχική. Διατηρείται η ενέργεια, ή όχι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. **(1)** **γ)** Τι θα συνέβαινε τη στιγμή που θα κλείνατε τους διακόπτες αν οι δύο πυκνωτές είχαν την ίδια χωρητικότητα; **(1)**

Δίνονται: $k_e= \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ Tm/A, $V(r)=k_e(dq/r)$, $d\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ.

1ο Θέμα (2η άσκηση στο φυλλάδιο 10).



(α). Εφαρμόζουμε τον κανόνα των βρόχων του Kirchhoff στο κύκλωμα, όταν κλείσουμε το διακόπτη, διατρέχοντας το δεξιόστροφα:

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \quad 0.5$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I - \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = 0 .$$

Αντικαθιστούμε: $x = \frac{\mathcal{E}}{R} - I$, $dx = -dI$

Άρα:

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -\frac{R}{L}t \Rightarrow$$

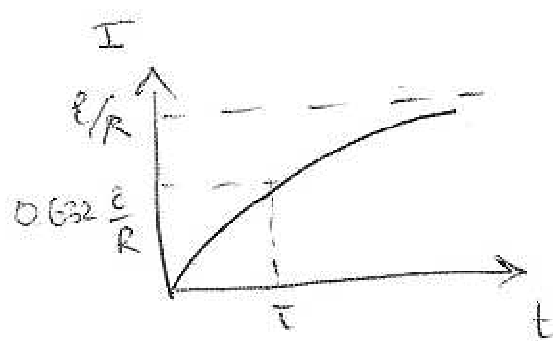
$$x = x_0 e^{-Rt/L} \quad 0.5$$

Επειδή $I = 0$ όταν $t = 0$, από τον ορισμό του x έχουμε ότι $x_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Άρα:

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-Rt/L} \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) \Rightarrow$$

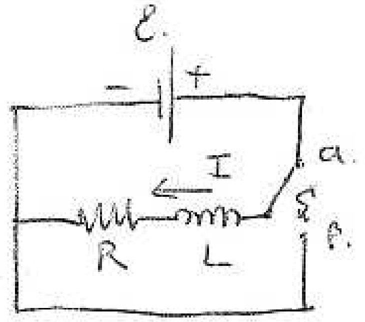
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \quad 0.5$$

όπου $\tau = L/R$, η σταθερά χρόνου του κυκλώματος.



0.5

(β)



Αφού θέσουμε το διακόπτη στη θέση α, ουσιαστικά έχουμε ένα κύκλωμα RL.
Σύμφωνα με τα προηγούμενα,

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \text{και} \quad \tau = L/R = \frac{140\times10^{-3}\,H}{4{,}9\,\Omega} = 28.6\,ms.$$

$$\mathcal{E}/R = \frac{6\,V}{4{,}9\,\Omega} = 1.22\,A. \qquad 0.25$$

Άρα:
$$0.22\,A = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/28.6ms}\right) \Rightarrow$$

$$0.22\,\cancel{A} = 1.22\,\cancel{A}\left(1 - e^{-t/28.6ms}\right) \Rightarrow 1 - e^{-t/28.6ms} = 0.18 \Rightarrow$$

$$e^{-t/28.6ms} = 0.82 \Rightarrow -t/28.6ms = -0.2 \Rightarrow \boxed{t = 5.67\,ms} \qquad 0.75$$

(γ) Μετά από 10s, το ρεύμα στο κύκλωμα έχει αποκτήσει τη μέγιστη τιμή του, 1.22A $(10s \gg \tau = 28.6ms)$.
Μόλις ο διακόπτης τοποθετηθεί στη θέση β, τότε το ρεύμα στο κύκλωμα μειώνεται:

$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\,dt \Rightarrow \int_{I_{max}}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln\frac{I}{I_{max}} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow I = I_{max}\,e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow \boxed{I = I_{max}\,e^{-t/\tau}}$$

0.5

$I_{max} = 1.22A$, $\tau = L/R = 28.6\,ms$. Άρα:

$$160\,mA = 1.22A\,e^{-t/28.6ms} \Rightarrow 160\times10^{-3}A = 1.22A\cdot e^{-t/28.6ms} \Rightarrow 0.13A = e^{-t/28.6ms} \Rightarrow -2.03 = -t/28.6ms \Rightarrow$$

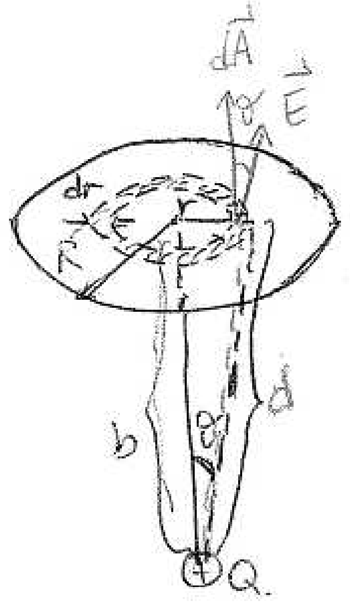
$$\boxed{t = 58.1\,ms.} \qquad 0.5.$$

2ο Θέμα

Η συνολική ροή που δημιουργεί το φορτίο, σε επιφάνεια σφαιρική, ακτίνας b, είναι:

$$\Phi_{E,o\lambda} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ (νόμος του Gauss). (0.5)

Είναι φυσικά ανεξάρτητη του b.



Θα υπολογίσω την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από τον κύκλο ακτίνας R, λόγω του φορτίου Q.

Θεωρώ στοιχειώδεις δακτυλίους, ακτίνας r, & πάχους dr. Κατά μήκος των δακτυλίων, το ηλεκτρικό πεδίο του φορτίου έχει το ίδιο μέτρο, ίσο με: $k_e \frac{Q}{d^2}$. Το $\vec{E}$, σχηματίζει γωνία θ με την κάθετο $d\vec{A}$ στον κάθε δακτύλιο. Άρα, η συνολική ροή που διέρχεται από τον κύκλο είναι: (1.0)

$$\Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\,dA\cos\vartheta = \int k_e\frac{Q}{d^2}\,2\pi r\,dr\,\cos\vartheta,$$ όπου:

$\cos\vartheta = \frac{b}{d}$, $r = \sin\vartheta\, d$ και: $dr = d\cdot d\vartheta$. Οπότε:

$$\Phi_E = 2\pi k_e Q \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_{max}} \frac{1}{d^2}(d\cdot d)\cdot \sin\vartheta\, d\vartheta \Rightarrow \boxed{\int \sin\vartheta\, d\vartheta = -\cos\vartheta}$$

$$\Phi_E = 2\pi k_e Q\,[1-\cos(\vartheta_{max})],$$ όπου: $\cos(\vartheta_{max}) = \frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}}$, (1.0)

άρα, αφού $\Phi_E = \frac{1}{4}\Phi_{E,o\lambda}$, θα έχω:

$$2\pi k_e Q\frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4} = \frac{4\pi k_e Q}{4} \Rightarrow \frac{2b}{\sqrt{b^2+R^2}} = 1 \Rightarrow$$

$$4b^2 = b^2 + R^2 \Rightarrow R^2 = 3b^2 \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{3}\,b.}$$ (0.5)

3^{o}_{z} Θέμα: Παράδειγμα H4.4 από το βιβλίο των SERWAY/JEWETT.