

Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια

Όταν ένα δοκιμαστικό φορτίο βρεθεί μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο, δέχεται μια ηλεκτρική δύναμη: $\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$. Η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική.

Έστω δοκιμαστικό φορτίο, q_0 , που μετακινείται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο κατά \vec{ds} (\vec{ds} είναι το απειροστό διάνυσμα μετατόπισης, το οποίο εφάπτεται σε μια διαδρομή στον χώρο). Στο σύστημα φορτίου-πεδίου, το έργο που παράγει/καταναλώνει η δύναμη Coulomb είναι: $\vec{F} \cdot \vec{ds} = q_0 \vec{E} \cdot \vec{ds}$.

Η δυναμική ενέργεια σε σημείο A ορίζεται ως το αντίστροφο του έργου που παράγεται/καταναλώνεται καθώς το φορτίο μετακινείται από ένα σημείο αναφοράς (έστω O) στο A:

$$U_A = -q_0 \int_O^A \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Επειδή η δύναμη είναι συντηρητική, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το φορτίο.

Ηλεκτρικό δυναμικό

Η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου, $V=U/q_0$, ορίζεται ως **ηλεκτρικό δυναμικό** του πεδίου:

$$V(\vec{r}_A) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_A} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Το Ο είναι το σημείο αναφοράς. Ως τέτοιο συχνά δεχόμαστε το σημείο στο οποίο η τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού είναι ίση με μηδέν (πχ το άπειρο στην περίπτωση σημειακού φορτίου).
- Το δυναμικό είναι είναι βαθμωτό μέγεθος χαρακτηριστικό του πεδίου. Είναι ανεξάρτητο από το όποιο φορτίο ενδέχεται να βρεθεί μέσα στο πεδίο. (Η δυναμική ενέργεια είναι χαρακτηριστικό του συστήματος φορτίου-πεδίου).
- Το δυναμικό έχει τιμή σε κάθε σημείο του ηλεκτρικού πεδίου.
- Μονάδα μέτρησης ηλεκτρικού δυναμικού: $1 \text{ V} \equiv 1 \text{ J/C}$

Έστω δύο σημεία A και B σε ηλεκτρικό πεδίο. Η μεταβολή του δυναμικού μεταξύ αυτών των σημείων είναι:

$$\Delta V = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Τις περισσότερες φορές στην πράξη, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του ηλεκτρικού πεδίου.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων οφείλεται αποκλειστικά στην ύπαρξη ενός φορτίου-πηγής και εξαρτάται από την κατανομή του φορτίου-πηγής.

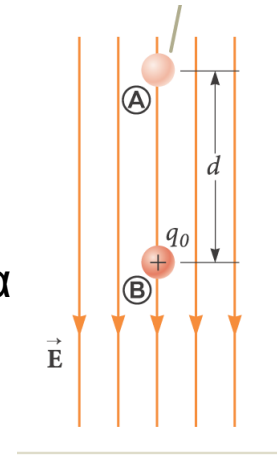
Το ηλεκτρικό δυναμικό (και η διαφορά δυναμικού - προσοχή!) περιγράφεται με διάφορους όρους. Οι πιο κοινοί είναι η τάση και το βολτάζ.

Διαφορά δυναμικού σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Έστω ηλεκτρικό πεδίο ομογενές. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B ισούται με:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \int_A^B ds = -Ed$$

Η μετατόπιση γίνεται από το σημείο A στο σημείο B, παράλληλα στις γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Τα διανύσματα του πεδίου και της μετατόπισης είναι συγγραμικά, και το πεδίο έχει το ίδιο μέτρο σε όλη τη διαδρομή.



Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μικρότερο στο σημείο B απ' ό,τι στο σημείο A, για το συγκεκριμένο πεδίο.

Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δείχνουν (πάντα) προς την κατεύθυνση στην οποία μειώνεται το ηλεκτρικό δυναμικό.

Ξεροντας το δυναμικό, μπορούμε να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια:

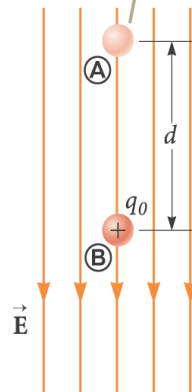
α) Σε ένα σύστημα που αποτελείται από ένα θετικό φορτίο και ένα ηλεκτρικό πεδίο, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος **μειώνεται** όταν το φορτίο κινείται με κατεύθυνση ίδια με αυτή του πεδίου.

Το ηλεκτρικό πεδίο παράγει έργο σε ένα θετικό φορτίο όταν το φορτίο κινείται στην κατεύθυνση του πεδίου. Η αύξηση της κινητικής ενέργειας του φορτισμένου σωματιδίου συνοδεύεται από ισόποση μείωση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος φορτίου-πεδίου.

β) Αν το φορτίο q_0 είναι αρνητικό, και κινείται με κατεύθυνση ίδια με αυτή του πεδίου, τότε η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας ΔU είναι θετική (η δυναμική ενέργεια **αυξάνεται**).

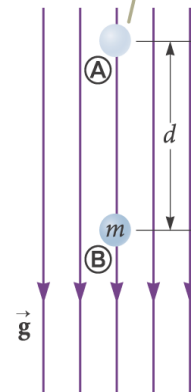
Για να κινηθεί το αρνητικό φορτίο στην κατεύθυνση του πεδίου, πρέπει να δεχτεί μια εξωτερική δύναμη η οποία θα παραγάγει θετικό έργο στο φορτίο.

Όταν ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο κινείται από το σημείο Α στο σημείο Β, τότε μειώνεται η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίου-πεδίου.



α

Όταν ένα υλικό σώμα κινείται από το σημείο Α στο σημείο Β, τότε μειώνεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώματος-πεδίου.



β

Ισοδυναμικές επιφάνειες

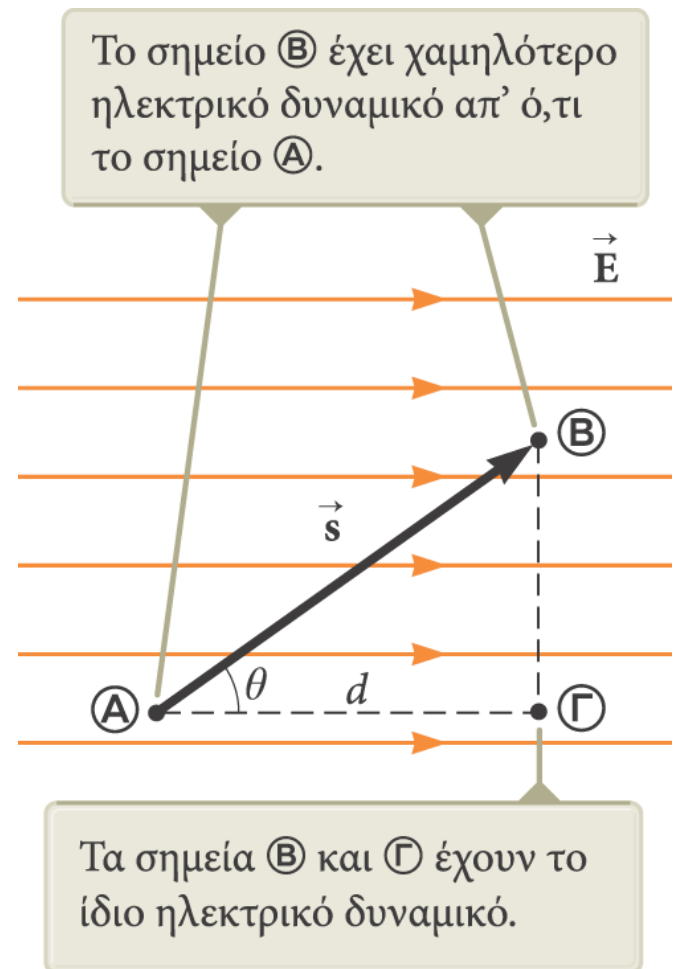
Το σημείο Γ έχει χαμηλότερο δυναμικό από το A .

Τα σημεία B και Γ έχουν το ίδιο δυναμικό.

- Όλα τα σημεία που ανήκουν σε ένα επίπεδο το οποίο είναι κάθετο σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό.

Κάθε επιφάνεια που αποτελείται από μια συνεχή κατανομή σημείων, τα οποία έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό, ονομάζεται

ισοδυναμική επιφάνεια.



Ηλεκτρικό δυναμικό συνεχούς κατανομής φορτίου

Μέθοδος 1: Η κατανομή φορτίου είναι γνωστή.

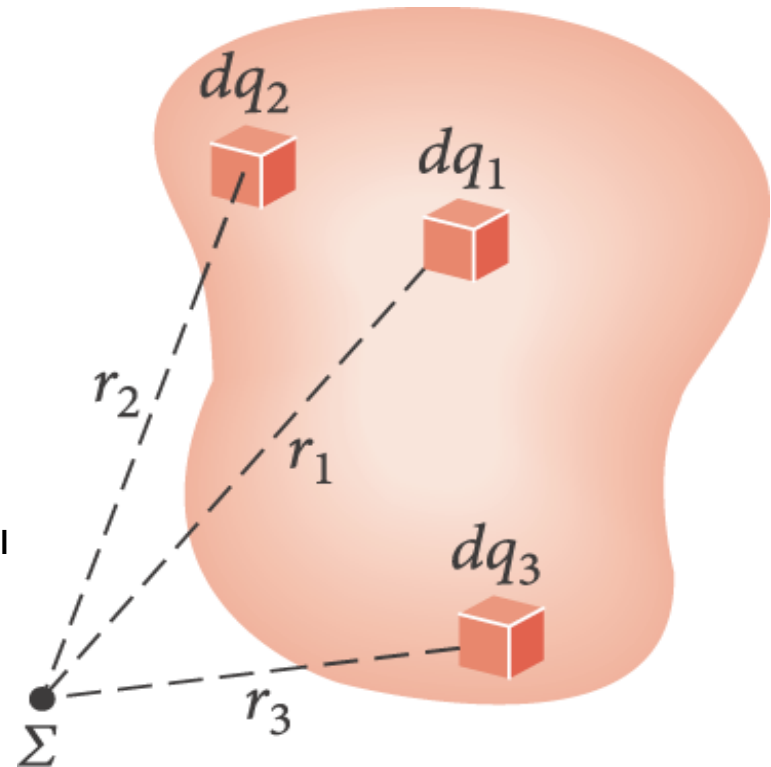
Θεωρούμε ένα μικρό στοιχειώδες φορτίο dq (εκλαμβάνουμε το φορτίο ως σημειακό). Το δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο λόγω αυτού του στοιχειώδους φορτίου είναι:

$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την παραπάνω εξίσωση για να συμπεριλάβουμε τις συνεισφορές όλων των στοιχείων της κατανομής φορτίου:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

(Σε αυτή τη σχέση για το V , το ηλεκτρικό δυναμικό θεωρείται ίσο με το μηδέν όταν το σημείο Σ βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από την κατανομή φορτίου).



Δεύτερος τρόπος:

Αν η κατανομή φορτίου χαρακτηρίζεται από επαρκή βαθμό συμμετρίας, τότε πρώτα υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο με τον νόμο του Gauss και έπειτα τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο τυχαίων σημείων:

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

(Επιλέγουμε $V = 0$ σε ένα κατάλληλο σημείο)

Ιδιότητες αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία

Όταν δεν υπάρχει κίνηση φορτίου σε έναν αγωγό, τότε λέμε ότι ο αγωγός είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

- 1)** Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν σε κάθε σημείο του εσωτερικού του αγωγού (είτε ο αγωγός είναι κοίλος είτε συμπαγής).
- 2)** Αν ο αγωγός είναι μονωμένος και φέρει φορτίο, τότε αυτό βρίσκεται στην επιφάνειά του.
- 3)** Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο που βρίσκεται ακριβώς έξω από έναν φορτισμένο αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού και έχει μέτρο σ/ϵ_0 (σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στο συγκεκριμένο σημείο).
- 4)** Η επιφάνεια κάθε φορτισμένου αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι ισοδυναμική και το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο εσωτερικό του αγωγού είναι σταθερό και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια.
- 5)** Σε έναν αγωγό με ακανόνιστο σχήμα, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της σε θέσεις όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι ελάχιστη.

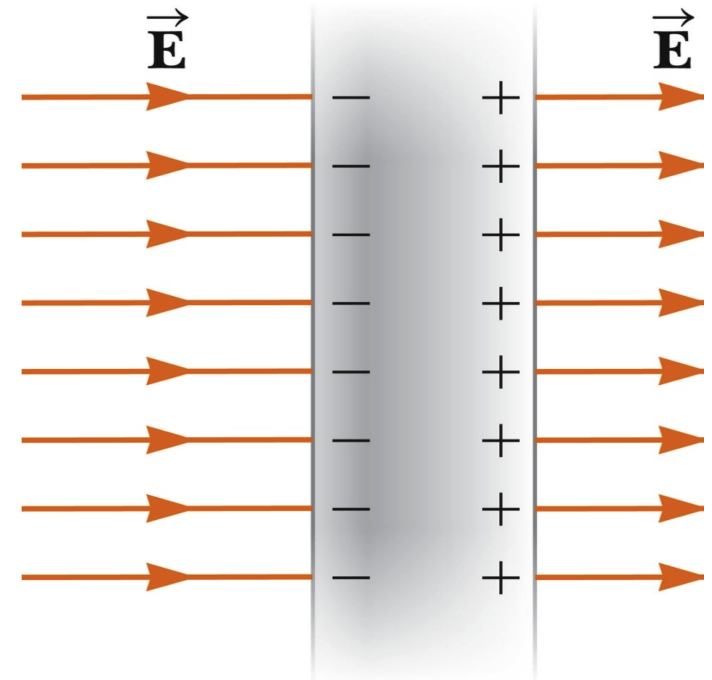
Ιδιότητα 1: Πεδίο_{εντός} = 0

Αν το πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού ήταν μη μηδενικό, τότε τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού θα δέχονταν μια ηλεκτρική δύναμη, άρα θα επιταχύνονταν, άρα θα είχαμε κίνηση φορτίου.

Θεωρούμε αγώγιμη πλάκα σε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Το πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν. Πως επιτυγχάνεται αυτό; Λογω εξωτερικού πεδίου έχουμε κίνηση ηλεκτρονίων → διαχωρισμός φορτίων → δημιουργία στο εσωτερικό πεδίου ίσης έντασης και αντίθετης φοράς με το εξωτερικό, άρα Πεδίο_{εντός} = 0.

Ο χρόνος για την επίτευξη ισοροπίας $\sim 10^{-16}$ s.

Αν υπάρχει κοιλότητα; (δες παρακάτω).

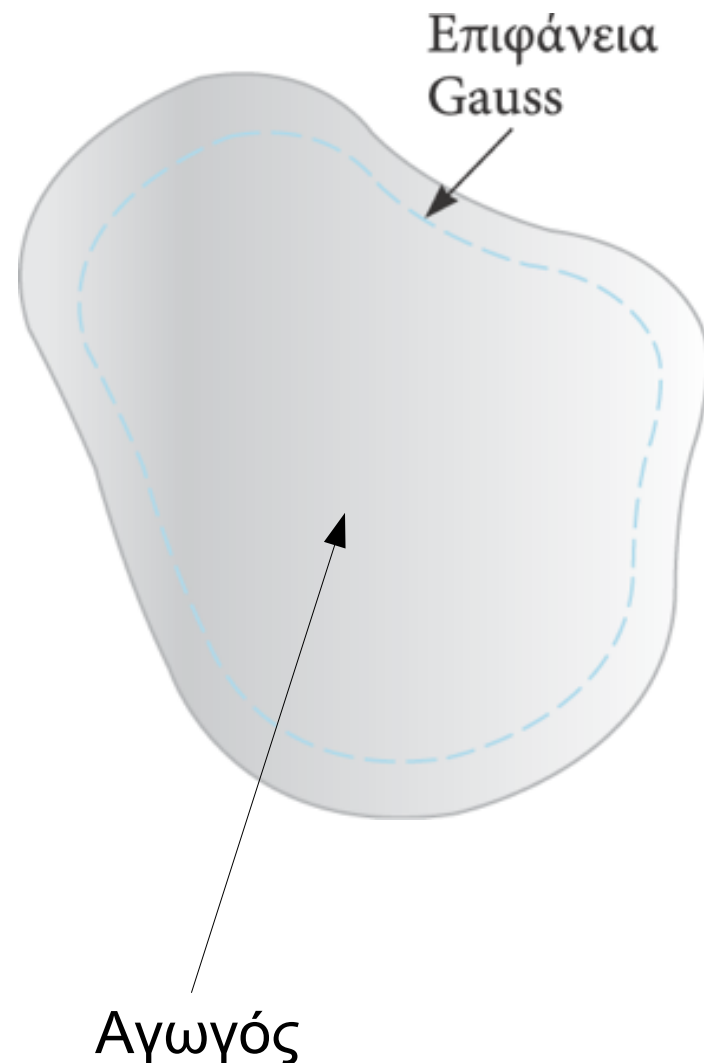


Ιδιότητα 2: Το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού

Επιλέγουμε μια επιφάνεια Gauss που βρίσκεται στο εσωτερικό του αγωγού, αλλά κοντά στην πραγματική επιφάνεια.

- Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι ίσο με μηδέν (ιδιότητα 1).
- Η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss είναι ίση με μηδέν.
- Εφόσον μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια Gauss βρίσκεται οσοδήποτε κοντά στην πραγματική επιφάνεια, συνεπάγεται ότι στο εσωτερικό της επιφάνειας δεν μπορεί να υπάρχει φορτίο. Άρα:

το φορτίο βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια του αγωγού.



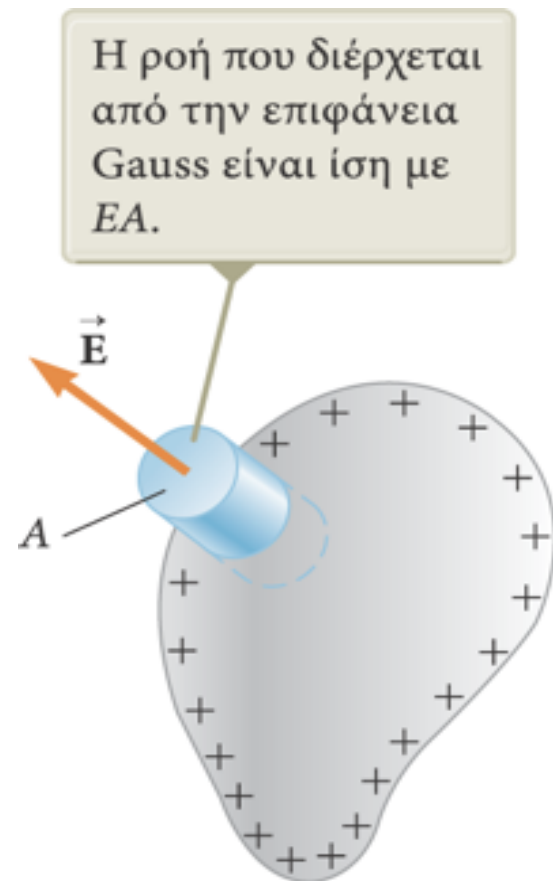
Ιδιότητα 3: Το μέτρο και η κατεύθυνση του πεδίου στην επιφάνεια του αγωγού.

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο (ένα μέρος του κυλίνδρου μόλις που εξέρχει από τον αγωγό, το υπόλοιπο είναι μέσα στον αγωγό).

- Το πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού (αν είχε παράλληλη συνιστώσα, τότε τα φορτία θα δέχονταν μια δύναμη, θα επιταχύνονταν επί της επιφάνειας και, επομένως, ο αγωγός δεν θα βρισκόταν σε ισορροπία).
- Η συνολική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια Gauss είναι ίση με εκείνη που διέρχεται μόνο από την επίπεδη βάση που βρίσκεται εκτός του αγωγού.

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss και βρίσκουμε:

$$E = \sigma / \epsilon_0$$



Ιδιότητα 4: Ηλεκτρικό δυναμικό φορτισμένου αγωγού

Θεωρούμε δύο σημεία επί της επιφάνειας του φορτισμένου αγωγού, A και B.

Το πεδίο \vec{E} είναι πάντα κάθετο στη μετατόπιση \vec{ds} .

$$\text{Άρα, } \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$$

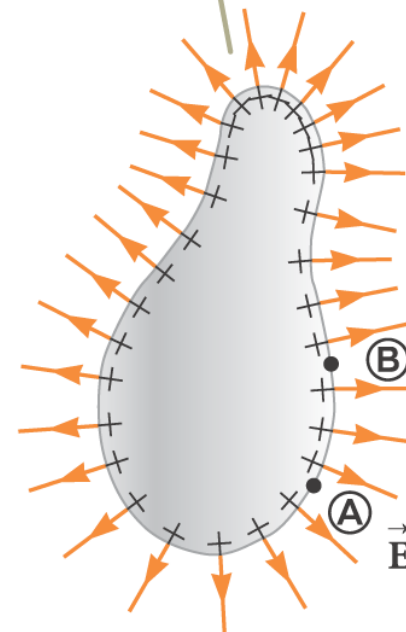
Επομένως, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B είναι μηδενική. Άρα:

- Σε κάθε σημείο της επιφάνειας ενός φορτισμένου αγωγού, ο οποίος βρίσκεται σε ισορροπία, $V = \text{σταθερό}$.

Δηλαδή, η επιφάνεια κάθε φορτισμένου αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι ισοδυναμική.

- Επειδή στο εσωτερικό του αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν, το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο εσωτερικό του αγωγού είναι σταθερό και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια.

Παρατηρήστε ότι οι αποστάσεις μεταξύ των θετικών προσήμων δεν είναι ίδιες, κάτι που σημαίνει ότι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου δεν είναι ομοιόμορφη.



Πεδίο σε κοιλότητα στο εσωτερικό ενός αγωγού

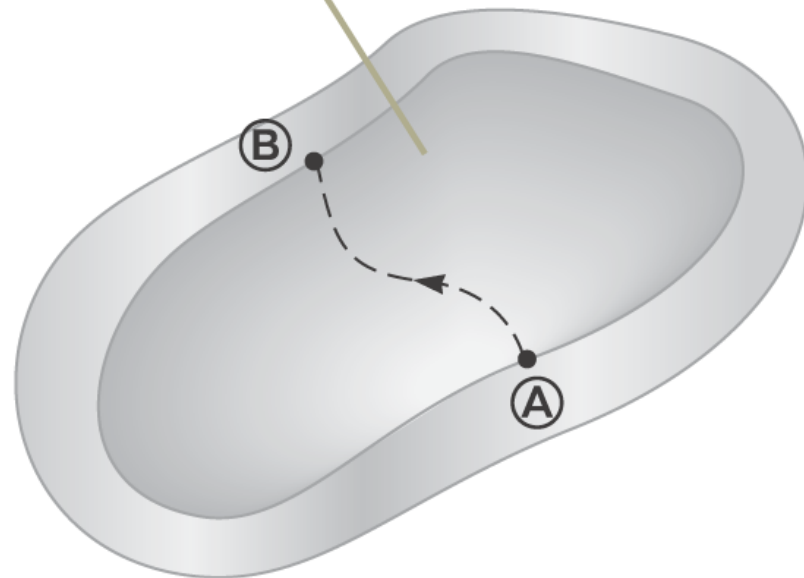
Έστω ότι ένας αγωγός περιέχει μια κοιλότητα ακανόνιστου σχήματος.

Για την οποιαδήποτε διαδρομή μεταξύ των (οποιοδήποτε) σημείων A και B , τα οποία είναι ισοδυναμικά, θα πρέπει να ισχύει:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το πεδίο είναι μηδέν μέσα στην κοιλότητα.

Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην κοιλότητα είναι ίσο με μηδέν, ανεξάρτητα από το φορτίο του αγωγού.



Σώματα με ακανόνιστο σχήμα (5η ιδιότητα)

Όπου η ακτίνα καμπυλότητας είναι μικρή, η πυκνότητα φορτίου είναι μεγάλη, και όπου η ακτίνα καμπυλότητας είναι μεγάλη, η πυκνότητα φορτίου είναι μικρή.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ισχυρό κοντά σε κυρτά σημεία με μικρή ακτίνα καμπυλότητας και φτάνει σε πολύ μεγάλες τιμές σε αιχμηρά σημεία.