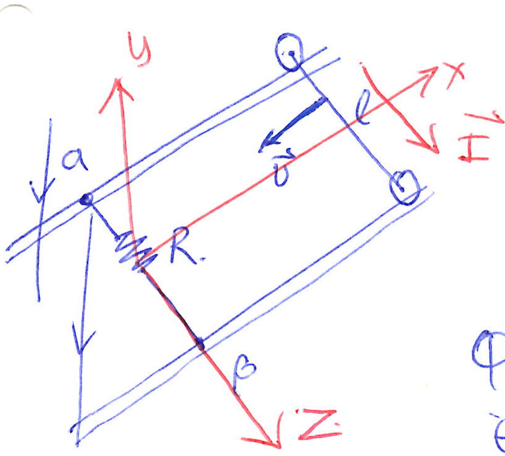
9ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ

1 Στην εικόνα ο μεταλλικός άξονας, μήκους 1.5 m, κινείται οριζόντια, υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης, πάνω σε παράλληλους, αγώγιμους οδηγούς, με ταχύτητα σταθερού μέτρου $\upsilon = 3\ m/s$. Μεταξύ των απέναντι σημείων α και β των οδηγών είναι συνδεδεμένος ένας αντιστάτης $R = 0.4\ \Omega$. Οι τροχοί του άξονα διατηρούν συνεχή ηλεκτρική επαφή με τους οδηγούς, οπότε ο άξονας, οι οδηγοί και ο αντιστάτης R σχηματίζουν κλειστό κύκλωμα. Η μόνη μη αμελητέα αντίσταση στο κύκλωμα είναι αυτή του αντιστάτη R. Υπάρχει επίσης ένα κατακόρυφο, ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = 0{,}08\,T$, με φορά προς τα κάτω. α) Βρείτε το ρεύμα I που επάγεται στον αντιστάτη I. (β) Για να συνεχίσει να κυλάει ο άξονας με ταχύτητα σταθερού μέτρου, ποια είναι η απαιτούμενη οριζόντια εξωτερική δύναμη F; γ) Ποιο άκρο του αντιστάτη, το α ή το β, βρίσκεται σε υψηλότερο ηλεκτρικό δυναμικό; δ) Κι αν...; Αφού ο άξονας περάσει τον αντιστάτη, αντιστρέφεται η φορά του ρεύματος σε αυτόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ



α) $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -B\ell\dfrac{dx}{dt} = -B\ell\upsilon \Rightarrow$

$|\mathcal{E}| = B\ell\upsilon$. Άρα:

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = 0.9\ A.$$

Φορά του ρεύματος: $\vec{I} = I\hat{k}$.

Έτσι ώστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται λόγω του I. να έχει την ίδια φορά με το B, μέσα στο κύκλωμα, ώστε να αντισταθεί στη μείωση της μαγνητικής ροής (λόγω μείωσης του εμβαδού του κυκλώματος) β). Απαιτούμενη οριζόντια εξωτερική δύναμη, $\vec{F}_{εξ}$, τέτοια ώστε:

$$\vec{F}_{εξ} = -\vec{F}_B = -I\vec{L}\times\vec{B} = -I\left[\ell\hat{k}\times(-\hat{j})B\right] = -I\ell B\hat{i} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{εξ} = -0.108\ N\ \hat{i}.$$

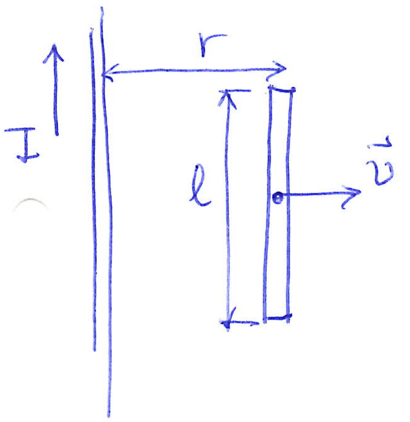
γ). Το ρεύμα στον αντιστάτη έχει από το β στο α, άρα:

$$V_β - V_α > 0.$$

δ). Όταν ο άξονας περάσει τον αντιστάτη η επιφάνεια του βρόχου αυξάνεται. Άρα το ρεύμα στον αντιστάτη θα πρέπει να δημιουργήσει $\vec{B}$ με φορά προς το $+\hat{j}$, ώστε το συνολικό $\vec{B}$ να μειώνεται (ή η μαγνητική ροή). Άρα, το I στον αντιστάτη θα διατηρήσει την ίδια φορά.

2 Μια αγώγιμη ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα σε διεύθυνση κάθετη προς ένα ευθύγραμμο σύρμα μεγάλου μήκους το οποίο φέρει ρεύμα I. Δείξτε ότι το μέτρο της ΗΕΔ που επάγεται στα άκρα της ράβδου είναι: $|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 \upsilon I l}{2\pi r}$, Σ' αυτή την περίπτωση, παρατηρήστε ότι, όπως είναι αναμενόμενο, η ΗΕΔ μειώνεται καθώς αυξάνεται η απόσταση r.

ΛΥΣΗ



Το μαγνητικό πεδίο του σύρματος έχει μέτρο: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Λόγω της κίνησης της ράβδου, τα ηλεκτρόνια δέχονται δύναμη μέτρου: $q\upsilon B$ $(\vec{\upsilon} \perp \vec{B})$. Λόγω της δύναμης αυτής, συγκεντρώνονται στη μία άκρη, κ' εμφανίζεται ΗΕΔ λόγω επαγωγής.

Η κίνηση σταματάει όταν, $\underbrace{E \cdot q}_{\text{δύναμη λόγω ηλεκτρικού πεδίου}} = q\upsilon B$ ή

δύναμη λόγω ηλεκτρικού πεδίου, όπου $E = \frac{|\mathcal{E}|}{l}$, άρα:

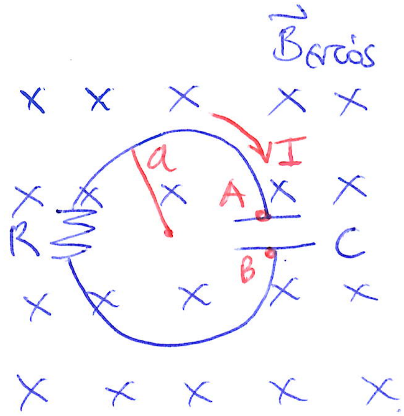
$$E = \upsilon B \Rightarrow \frac{|\mathcal{E}|}{l} = \upsilon \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow$$

$$\boxed{|\mathcal{E}| = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) \upsilon l.}$$

3 Στην εικόνα, ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο μειώνεται με σταθερό ρυθμό $\frac{dB}{dt} = -k$, όπου k θετική σταθερά. Ένας κυκλικός συρμάτινος βρόχος, ακτίνας a, ο οποίος διαθέτει αντίσταση R και χωρητικότητα C, είναι τοποθετημένος με το επίπεδό του κάθετο στο πεδίο. (α) Βρείτε το φορτίο Q του πυκνωτή όταν είναι πλήρως φορτισμένος. (β) Ποιος οπλισμός, ο επάνω ή ο κάτω, έχει υψηλότερο δυναμικό; (γ) Σχολιάστε τη δύναμη που προκαλεί τον διαχωρισμό των φορτίων.

ΛΥΣΗ

α)



Λόγω μείωσης του μέτρου του B, εμφανίζεται ΗΕΔ εξ' επαγωγής:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(B \cdot \pi a^2)}{dt} = \pi a^2 k.$$

Άρα: $Q = C\mathcal{E} \Rightarrow \boxed{Q = C\pi a^2 k.}$

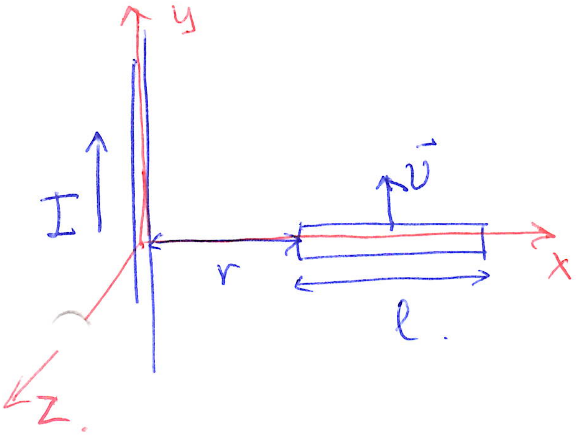
β). $\vec{B}$ με κατεύθυνση προς τη σελίδα, κ' B ελαττώνεται. Άρα, το ρεύμα θα έχει φορά σύμφωνα με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, ώστε να αυξήσει την ένταση του B, άρα:

$\Delta V = V_A - V_B > \phi$, άρα ο πάνω οπλισμός έχει υψηλότερο δυναμικό.

γ). Το μεταβαλλόμενο $\vec{B}$ δημιουργεί $\vec{E}$, και η δύναμη στα φορτία λόγω $\vec{E}$ προκαλεί την κίνησή τους (κ' άρα το διαχωρισμό).

4 Μια αγώγιμη ράβδος μήκους ℓ κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ παράλληλα σε σύρμα μεγάλου μήκους, το οποίο φέρει σταθερό ρεύμα I. Ο άξονας της ράβδου διατηρείται κάθετος στο σύρμα, με το πλησιέστερο άκρο της να απέχει r από το σύρμα. Βρείτε το μέτρο της ΗΕΔ που επάγεται στα άκρα της ράβδου.

ΛΥΣΗ



Το σύρμα, λόγω του I, δημιουργεί μαγνητικό πεδίο μέτρου: $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, και: $\vec{B}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{k}$. Λόγω του $\vec{B}$, τα ηλεκτρ. στη ράβδο υφίστανται δύναμη:

$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} = qvB\left[\hat{j}\times(-\hat{k})\right] \Rightarrow \vec{F}_B = -qvB\,\hat{i}$$

Η δύναμη δημιουργεί διαχωρισμό φορτίων, δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο, E, κ' επέρχεται ισορροπία όταν:

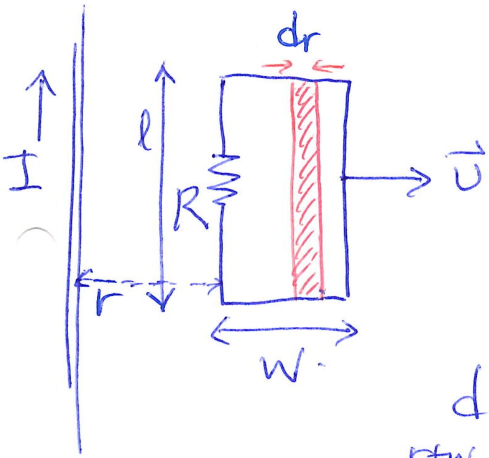
$Eq = qvB \Rightarrow E = vB$, κ' άρα: $|\mathcal{E}| = E\ell = vB\ell$, όπου $|\mathcal{E}|$ η ΗΕΔ εξ' επαγωγής στα άκρα της ράβδου. Όμως, το B δεν είναι σταθερό κατά μήκος της ράβδου, άρα, σε κάθε σημείο, απόστασης r από το σύρμα, και μήκους dr, θα ισχύει:

$$|d\mathcal{E}| = v\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr \Rightarrow$$

$$|\mathcal{E}| = \frac{v\mu_0 I}{2\pi}\int_r^{\ell+r}\frac{dr}{r} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\left(1+\frac{\ell}{r}\right)}$$

5 Ένας ορθογώνιος βρόχος με διαστάσεις l και w απομακρύνεται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ από ένα σύρμα μεγάλου μήκους, το οποίο φέρει ρεύμα I και βρίσκεται στο επίπεδο του βρόχου. Η συνολική αντίσταση του βρόχου είναι R. Βρείτε μία σχέση που να δίνει το ρεύμα στο βρόχο, όταν η πλησιέστερη στο σύρμα πλευρά του απέχει r από αυτό.

ΛΥΣΗ



Μαγνητικό πεδίο, λόγω I, του σύρματος:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Υπολογισμός μαγνητικής ροής, Φ_B, στο βρόχο:

$$d\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot l\,dr \Rightarrow \Phi_B = \int_A B\,dA \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_r^{r+w}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\left(1+\frac{w}{r}\right).$$

Λόγω της κίνησης του βρόχου, το Φ_B αλλάζει, και άρα:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi}\frac{d}{dt}\ln\left(1+\frac{w}{r}\right) \Rightarrow$$

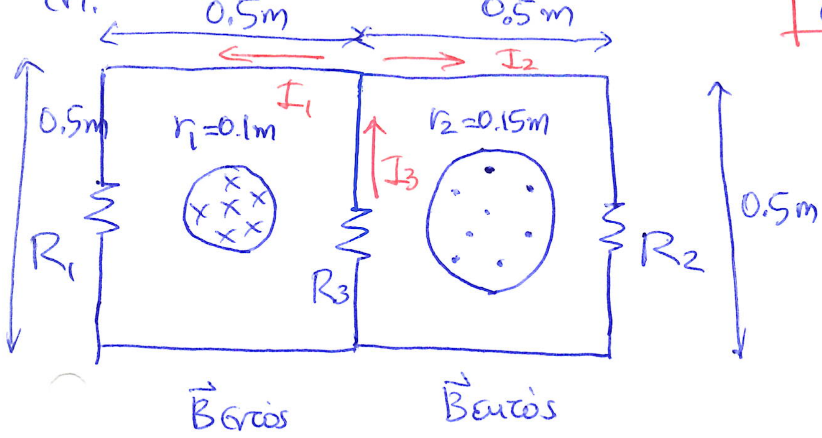
$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi}\,\frac{d\left[\ln(1+w/r)\right]}{d(1+w/r)}\,\frac{d(1+w/r)}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi r}\,\frac{w}{r+w},$$

οπότε, για το ρεύμα στο βρόχο, i, ισχύει:

$$\boxed{i(r) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi R r}\,\frac{w}{w+r}.}$$

16 Δύο σωληνοειδή απείρου μήκους διέρχονται από ένα κύκλωμα (φαίνονται σε τομή στην εικόνα). Το μέτρο του $\vec{B}$ στο εσωτερικό του καθενός τους είναι το ίδιο και αυξάνεται με ρυθμό 100 T/s. Πόσο είναι το ρεύμα σε κάθε αντιστάτη.



ΛΥΣΗ

$R_1 = 6\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$.

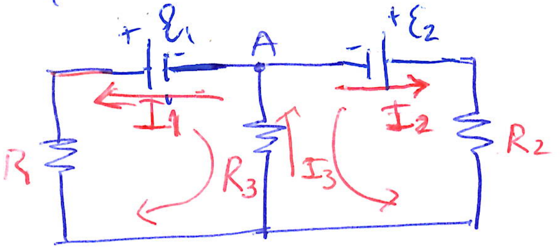
Στον κάθε βρόχο αναπτύσσεται ΗΕΔ εξ' επαγωγής λόγω μεταβολής της μαγνητικής ροής:

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi}{dt} = A\frac{dB}{dt},$$

όπου A είναι το εμβαδόν του κάθε σωληνοειδούς. Άρα:

$$|\mathcal{E}_1| = A_1\frac{dB}{dt} = \pi r_1^2 \frac{dB}{dt} = 3.14\,V \quad \text{και} \quad |\mathcal{E}_2| = \pi r_2^2 \frac{dB}{dt} = 2.25\,V$$

Λόγω των $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ εμφανίζονται ρεύματα στους βρόχους, I_1 και I_2, με την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα: Το I_1 αντίθετα προς τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού (για να προκαλέσει $\vec{B}$ εντός), και το I_2 με αντίθετη φορά για να δημιουργήσει $\vec{B}$ εντός. Οπότε, το παραπάνω κύκλωμα είναι ισοδύναμο με το παρακάτω:



Κανόνες Kirchhoff:

$I_3 = I_1 + I_2$

$I_1 \cdot R_1 + I_3 R_3 - \mathcal{E}_1 = 0$ (βρόχος αριστερά)

$I_2 R_2 + I_3 R_3 - \mathcal{E}_2 = 0$ (— // — δεξιά)

3 εξισώσεις, 3 άγνωστοι (θα πρέπει οι φοιτητές να μπορούν να κάνουν πράξεις κ' να δείξουν:)

$I_1 = 0.0623\,A$

$I_2 = 0.86\,A$

$I_3 = 0.923\,A$.