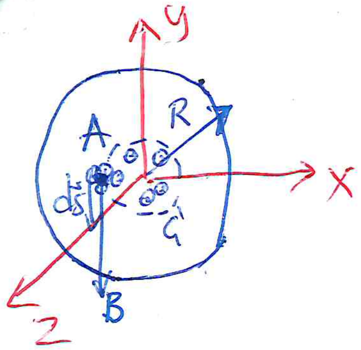
$8^{\underline{o}}$ ΦΥΛΛΑΔΙΟ

1 Μία δέσμη 100 ευθύγραμμων, μονωμένων συρμάτων μεγάλου μήκους σχηματίζει έναν «συμπαγή» κύλινδρο ακτίνας $R=0.5\,cm$. Αν σε κάθε σύρμα το ρεύμα είναι $2A$, βρείτε (α) το μέτρο και (β) την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης ανά μονάδα μήκους που δέχεται ένα σύρμα σε απόσταση $0.2\,cm$ από το κέντρο της δέσμης γ) Κι αν...; Ένα σύρμα που βρίσκεται στην επιφάνεια της δέσμης δέχεται μεγαλύτερη ή μικρότερη δύναμη από αυτή που υπολογίσατε στα (α) και (β); Αιτιολογήστε ποιοτικά την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ



Σύμφωνα με το νόμο του Ampere:

$$\oint_{c} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

Όπου c η κλειστή διαδρομή κύκλου ακτίνας $r=0.2\,cm$. Διαλέγω $d\vec{s}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Λόγω συμμετρίας, $\vec{B} \parallel d\vec{s}$. Άρα:

$$\oint_{c} \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\oint_{c} ds = B2\pi r.$$ Και άρα: $B(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (1). I είναι το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τα σύρματα που βρίσκονται μέσα στον κύκλο ακτίνας r. Αν $I_{ολ}$ το ρεύμα όλων των συρμάτων στο συμπαγή κύλινδρο ακτίνας $R=0.5\,cm$, τότε:

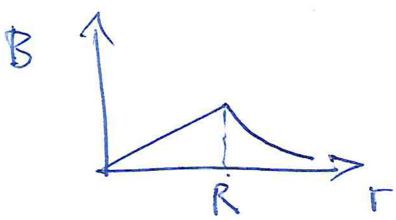
$$I(r)=I_{ολ}\frac{r^2}{R^2}.$$ Άρα:

$$B(r)=\frac{\mu_0 I_{ολ}}{2\pi R^2}\frac{r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} \Rightarrow \boxed{B(r)=\frac{\mu_0 I_{ολ}\, r}{2\pi R^2}} \quad r<R \quad (2)$$

Αν $r>R$, τότε $I=I_{ολ}$, και από την (1) έχουμε:

$$B(r)=\frac{\mu_0 I_{ολ}}{2\pi r}, \quad r>R. \quad (3)$$

Άρα:



Άρα, η ένταση του πεδίου αυξάνεται γραμμικά με την ακτίνα μέσα στον κύλινδρο, και μετά μειώνεται ως $1/r$, έξω από τον κύλινδρο.

Στην απόσταση $r = 0.2\,cm$, από την (2) έχουμε:

$$B(r=0.2m) = 3.17\times10^{-3}\,T.$$

($\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,T.m/A$, $I_{\alpha} = 2\times99\,A$: εδώ μελετάμε τη δύναμη που ασκείται σ' ένα σύρμα, λόγω του ρεύματος που διαρρέει τα υπόλοιπα 99).

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα καλώδιο στο σημείο A, στη θέση $x = -0.2\,cm$. Αν σ' αυτό το σημείο υπάρχει σύρμα, τότε η δύναμη σ' αυτό λόγω του μαγνητικού πεδίου, $\vec{B} = -B\hat{j}$, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{F}_B = I\vec{L}\times\vec{B} = IL\hat{k}\times(-B\hat{j}) = ILB(\hat{j}\times\hat{k}) \Rightarrow$$

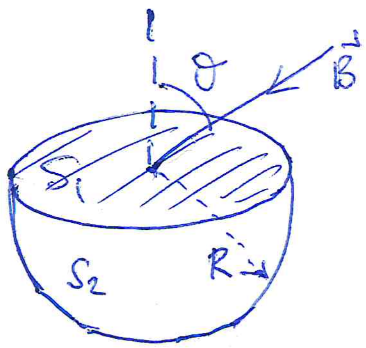
$\vec{F}_B = ILB\hat{i}$. Η δύναμη είναι ελκτική, μέτρου:

$F_B = ILB \Rightarrow \dfrac{F_B}{L} = 6.34\times10^{-3}\,\dfrac{N}{m}$. Αυτό το αποτέλεσμα ισχύει για όλα τα καλώδια σε απόσταση $r = 0.2\,cm$ από το κέντρο.

(γ). Όπως δείξαμε, το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται γραμμικά με την απόσταση από το κέντρο του κυλίνδρου έως την επιφάνεια του. Αφού $F\propto B$, η δύναμη θα αυξάνεται γραμμικά με την απόσταση. Αφού $R/r(=0.2\,cm) = 2.5$, η δύναμη θα είναι μεγαλύτερη στην επιφάνεια του κυλίνδρου κατά ένα παράγοντα ίσο με 2.5

2. Θεωρείστε την κλειστή ημισφαιρική επιφάνεια της εικόνας. Το ημισφαίριο βρίσκεται μέσα σ' ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Υπολογίστε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από (α) την επίπεδη επιφάνεια S_1 και (β) την ημισφαιρική επιφάνεια S_2.

ΛΥΣΗ



α) $\vec{B}$ είναι ομογενές. Άρα, για την S_1:

$$\Phi_{S_1} = \int_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_{S_1} B\,dA\cos\theta =$$

$$= B\cos\theta \int_{S_1} dA = \boxed{B\cos\theta\,\pi R^2 = \Phi_{S_1}}$$

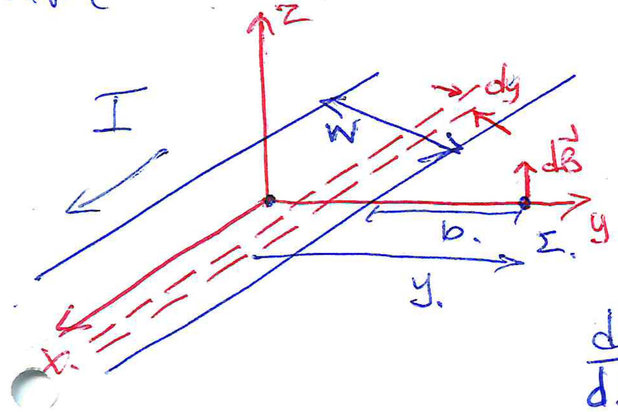
β). Για την κλειστή επιφάνεια, από το Νόμο του Gauss έχουμε:

$$\Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_{S_2} = -B\cos\theta\,\pi R^2.}$$

3 Μία λεπτή μεταλλική ταινία μεγάλου μήκους και πλάτους w φέρει ρεύμα I κατά το μήκος της. Το ρεύμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο πλάτος της ταινίας. Το σημείο Σ βρίσκεται στο επίπεδο της ταινίας, σε απόσταση b από την πλευρά της. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο Σ.

ΛΥΣΗ



Θεωρώ στοιχειώδες τμήμα στην ταινία, πάχους dy, το οποίο είναι ουσιαστικά ένας αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα, έστω dI. Ισχύει:

$$\frac{dI}{dy} = \frac{I}{w} \Rightarrow$$ (αφού το ρεύμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο)

$dI = \frac{I}{w}dy$. Αυτός ο αγωγός προκαλεί μαγνητικό πεδίο στο Σ, έστω $d\vec{B}$, που δίνεται από τη σχέση:

$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi y}\hat{k}$. Άρα, το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο Σ από την ταινία θα είναι:

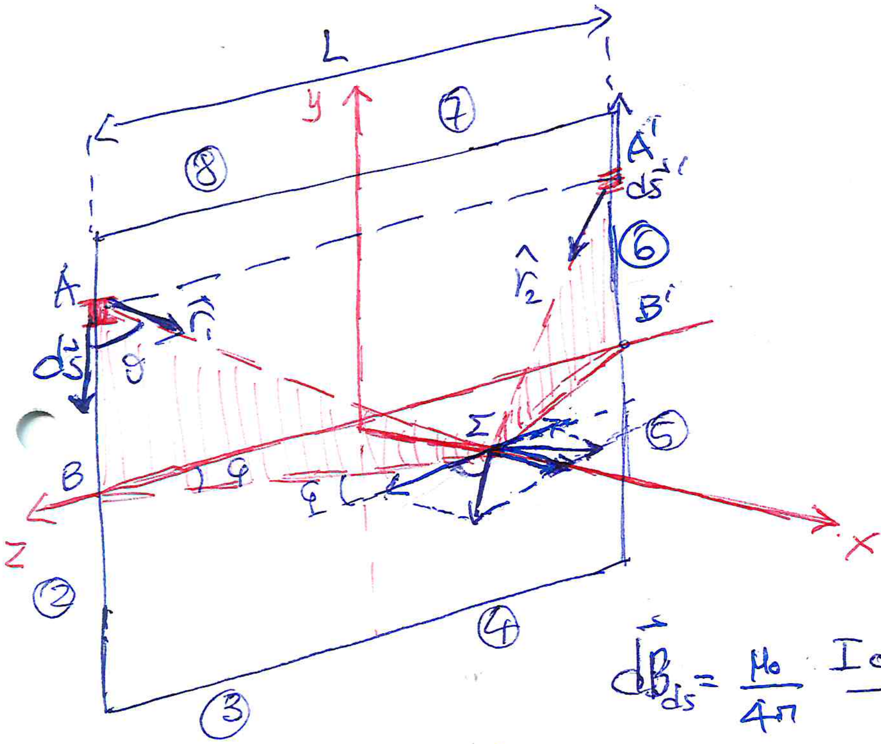
$$\vec{B}_{ολ} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w}\left(\int_b^{b+w}\frac{dy}{y}\right)\hat{k} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}_{ολ} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w}\ln\left(1+\frac{w}{b}\right)\hat{k}.}$$

4

Ένα σύρμα διαμορφώνεται σε σχήμα τετραγώνου με μήκος πλευράς L. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο σ' ένα σημείο Σ επί του άξονα του βρόχου και σε απόσταση x από το κέντρο του, όταν το ρεύμα στο βρόχο είναι I.

ΛΥΣΗ



Χωρίζουμε το τετράγωνο σε 8 τμήματα. Έστω στοιχειώδες κομμάτι του σύρματος $d\vec{s}$ στο τμήμα 1, κι το αντιδιαμετρικό του, $d\vec{s}'$, στο τμήμα 6, στο σημείο A'. Το μαγνητικό πεδίο του $d\vec{s}$ στο σημείο Σ, θα δίνεται από τη σχέση:

$$d\vec{B}_{ds} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{s}\times\vec{r}_1}{r_1^2},$$

όπου: $r_1^2 = y^2+x^2+L^2/4$, $d\vec{s}\times\vec{r}_1$ = διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο ΑΒΣ, μέτρου: $ds(=dy)\sin\theta = dy\frac{\sqrt{L^2/4+x^2}}{r_1}$, άρα, το μέτρο του $d\vec{B}_{ds}$ θα είναι: $dB_{ds} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dy\sqrt{L^2/4+x^2}}{r_1^3}$. Το διάνυσμα $d\vec{B}_{ds}$ θα έχει δύο συνιστώσες: $dB_{ds}\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)\hat{k}$, και $dB_{ds}\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)\hat{i}$.

Λόγω συμμετρίας, το μαγνητικό πεδίο του $d\vec{s}'$ (στο A'), θα έχει το ίδιο μέτρο με το $d\vec{B}_{ds}$, κι δύο συνιστώσες: $-dB_{ds'}\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)\hat{k}$ και $dB_{ds}\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)\hat{i}$. Οι z-συνιστώσες των δύο πεδίων αναιρούνται, άρα, τελικά, θα πρέπει να υπολογίσουμε την x-συνιστώσα του πεδίου, λόγω των 8 τμημάτων του τετραγωνικού σύρματος, να την πολ/σουμε με 8, και αυτό θα μας δώσει το συνολικό πεδίο (το οποίο ως διάνυσμα, θα βρίσκεται στον άξονα x).

Άρα, το μέτρο της x-συνιστώσας του πεδίου, λόγω του ρευματοφόρου αγωγού ΑΒ, θα δίνεται από τη σχέση:

$$B_{1,x} = \int_0^{L/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\sqrt{L^2/4+x^2}}{r_1^3} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}_{=\cos\varphi = \frac{L/2}{\sqrt{L/4+x^2}}} dy \Rightarrow$$

$$B_{1,x} = \frac{\mu_0 I L}{8\pi} \int_0^{L/2} \frac{1}{\left(y^2+x^2+L^2/4\right)^{3/2}} dy$$

Ισχύει: $$\int \frac{1}{(x^2+a+b)^{3/2}} dx = \frac{x}{(b+a)\sqrt{x^2+a+b}}$$

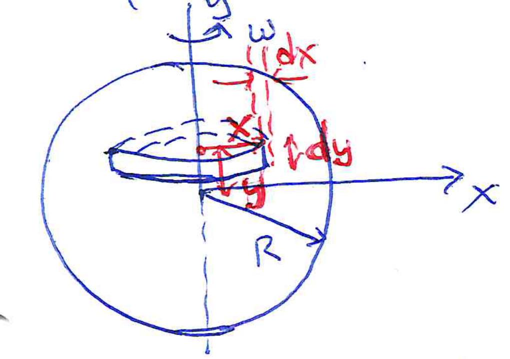
Οπότε:

$$B_{1,x} = \frac{\mu_0 I L^2}{16\pi \left(x^2+L^2/4\right)\left(x^2+L^2/2\right)^{1/2}}$$, και τελικά:

$$B_{ολ} = 8 B_{1,x} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{ολ} = \frac{\mu_0 I L^2}{2\pi} \frac{1}{\left(x^2+L^2/4\right)\left(x^2+L^2/2\right)^{1/2}} \hat{i}}$$

5. Μία σφαίρα ακτίνας R έχει ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Όταν η σφαίρα περιστρέφεται ως άκαμπτο σώμα, με γωνιακή ταχύτητα ω ως προς ένα άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της, προσδιορίστε (α) το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο της σφαίρας και (β) τη μαγνητική ροπή της σφαίρας.

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε δακτυλίδια πάχους dx και dy. Το καθ' ένα απ' αυτά συνεισφέρει στο μαγνητικό πεδίο στο κέντρο της σφαίρας. Καθώς στρέφεται η σφαίρα, και αφού είναι φορτισμένη, αυτά τα δακτυλίδια είναι ουσιαστικά ρευματοφόροι βρόχοι. Για να βρούμε την ένταση του ρεύματος δουλεύουμε ως εξής:

φορτίο δακτυλιδιού (όπως αυτού στην εικόνα): $dq = \rho dV = 2\pi x\,dx\,dy\,\rho$

Περιστρέφεται με $T = \frac{\omega}{2\pi}$, άρα: $dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} \Rightarrow$

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} 2\pi \rho x\,dx\,dy \Rightarrow \quad dI = \omega\rho x\,dx\,dy.$$

Το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο της σφαίρας (που απέχει απόσταση y από το κέντρο του δακτυλιδιού είναι):

$$dB = \frac{\mu_0 x^2 dI}{2(x^2+y^2)^{3/2}}$$ (γνωστό από παράδειγμα του βιβλίου), άρα

$$dB = \frac{\mu_0 \omega \rho}{2} \frac{x^3\,dx\,dy}{(y^2+x^2)^{3/2}}.$$ Ισχύει: $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ (1) Άρα:

$$B = \iint dB \Rightarrow \quad B = \int_{y=-R}^{R}\int_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{\mu_0\omega\rho}{2} \frac{x^3\,dx\,dy}{(y^2+x^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$B = \int_{y=-R}^{R}\left[\int_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{\mu_0\rho\omega}{2}\frac{x^3\,dx}{(y^2+x^2)^{3/2}}\right]dy. \quad (2)$$

Θεωρώ αλλαγή μεταβλητών: $V = x^2+y^2 \Rightarrow x^2 = V - y^2$ και: $dV = 2x\,dx$.

Οπότε, η (2) γράφεται ως εξής:

$$B = \int_{y=-R}^{R} \left[\int_{v=y^2}^{R^2} \frac{\mu_0 \rho \omega}{4} \frac{(v-y^2)}{v^{3/2}} dv \right] dy \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \rho \omega}{4} \int_{y=-R}^{R} \left[\int_{v=y^2}^{R^2} v^{-1/2} dv - y^2 \int_{v=y^2}^{R^2} v^{-3/2} dv \right] dy \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \rho \omega}{4} \int_{y=-R}^{R} \left[2 v^{1/2} \Big|_{y^2}^{R^2} + 2y^2 v^{-1/2} \Big|_{y^2}^{R^2} \right] dy =$$

$$= \frac{\mu_0 \rho \omega}{4} \int_{y=-R}^{R} \left[2 (R - |y|) + 2y^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{|y|} \right) \right] dy \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \rho \omega}{4} \int_{y=-R}^{R} \left(\frac{2y^2}{R} + 2R - 4|y| \right) dy \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} \int_{y=0}^{R} \left(\frac{2y^2}{R} + 2R - 4y \right) dy \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 \rho \omega R^2}{3}}$$ Διάνυσμα με φορά κατά μήκος του $\hat{j}$.

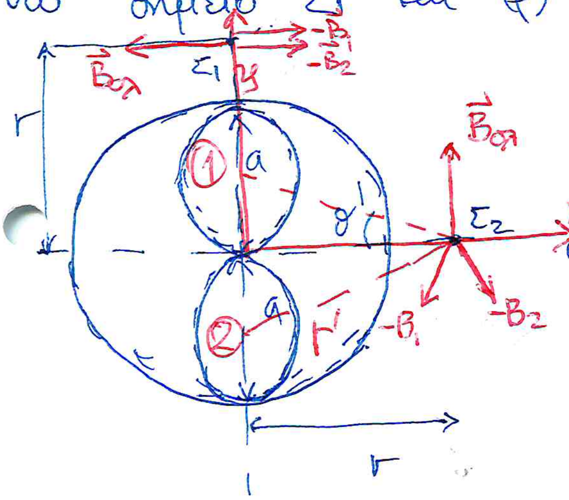
(β). Έστω $A = \pi x^2$ η επιφάνεια του κάθε δακτυλιδιού. Τότε, η μαγνητική ροή θα είναι:

$d\mu = A dI \Rightarrow d\mu = \pi \omega \rho x^3 dx dy$. Άρα, η ολική ροή θα είναι: $\mu = \pi \omega \rho \int_{y=-R}^{R} \left[\int_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^3 dx \right] dy \Rightarrow$

$$\mu = \pi \omega \rho \int_{y=-R}^{R} \frac{(R^2-y^2)^2}{4} dy \Rightarrow \mu = \frac{\pi \omega \rho}{4} \int_{y=-R}^{R} (R^4 + y^4 - 2R^2 y^2) dy \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu = \frac{4 \pi \omega \rho R^5}{15}}$$ Διάνυσμα με φορά κατά μήκος του $\hat{j}$.

6 Ένας κυλινδρικός αγωγός μεγάλου μήκους, ακτίνας a, φέρει δύο κυλινδρικές κοιλότητες διαμέτρου a η καθε μια, οι οποίες διατρέχουν όλο το μήκος του, όπως φαίνεται σε μία τομή του αγωγού στην Εικόνα. Το ρεύμα I στον αγωγό έχει φορά προς τα έξω (προς τον αναγνώστη) και είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στη διατομή του αγώγιμου υλικού. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου συναρτήσει των μ_0, I, r, και a, α) στο σημείο Σ_1 και (β) στο σημείο Σ_2.



ΛΥΣΗ

Για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Σ_1 ή στο σημείο Σ_2 θα βρούμε πρώτα το πεδίο του αγωγού ως εαν δεν υπήρχαν οι κοιλότητες, ας πούμε $\vec{B}_{o\lambda}$. Στη συνέχεια θα βρούμε το μαγνητικό πεδίο της κάθε μίας κοιλότητας, 1 και 2, και θα τα αφαιρέσουμε: $\vec{B}_{o\lambda}(\Sigma_1) = \vec{B}_{\alpha\gamma}(\Sigma_1) - \vec{B}_1(\Sigma_1) - \vec{B}_2(\Sigma_1)$. (1).
Το ίδιο θα κάνουμε κ για τον υπολογισμό του $\vec{B}_{o\lambda}(\Sigma_2)$.

α). Στο Σ_1, $B_{\alpha\gamma} = \dfrac{2 I_{\alpha\gamma}}{2\pi r}$ (2) (ακόμα κ για αγωγό πάχους R, το μαγν. πεδίο σε απόσταση $r>R$ έχει μέτρο $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$).

Για να βρούμε το $I_{\alpha\gamma}$ (το ρεύμα που θα διέρρεε τον αγωγό αν δεν υπήρχαν κοιλότητες) υπολογίζω την πυκνότητα ρεύματος:

$J = \dfrac{I}{A}$, όπου $A = \pi a^2 - \pi\dfrac{a^2}{4} - \pi\dfrac{a^2}{4} = \pi\dfrac{a^2}{2}$, άρα: $J = \dfrac{2I}{\pi a^2}$ (3).

Οπότε: $I_{\alpha\gamma} = J \cdot A = J \cdot \pi a^2 \Rightarrow I_{\alpha\gamma} = 2I$.

Άρα, από την (1): $B_{\alpha\gamma}(\Sigma_1) = \dfrac{2\mu_0 I}{2\pi r}$, κ ως διάνυσμα:

$\vec{B}_{\alpha\gamma} = -\dfrac{2\mu_0 I}{2\pi r}\hat{i}$ (4).

Επίσης: $B_1(\Sigma_1) = -\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}$ και $B_2(\Sigma_1) = -\dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}$, όπου:

$$I_1 = I_2 = J \cdot A_1 = J \cdot \pi \frac{a^2}{4} = \frac{2I}{\pi a^2} \frac{\pi a^2}{4} = \frac{I}{2}.$$ Άρα:

$$\vec{B}_1(\Sigma_1) = -\frac{\mu_0 I/2}{2\pi(r-\frac{a}{2})}\hat{i} \quad \text{και} \quad \vec{B}_2(\Sigma_1) = \frac{-\mu_0 I/2}{2\pi(r+a/2)}\hat{i}. \quad (5).$$

Λόγω των (4) & (5), η (1) γράφεται:

$$\vec{B}_{ολ}(\Sigma_1) = -\frac{2\mu_0 I}{2\pi}\hat{i} + \frac{\mu_0 I/2}{2\pi(r-a/2)}\hat{i} + \frac{\mu_0 I/2}{2\pi(r+a/2)}\hat{i} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}_{ολ}(\Sigma_1) = -\frac{\mu_0 I}{\pi r}\frac{2r^2-a^2}{4r^2-a^2}\hat{i}}$$

β). Στο σημείο Σ_2:

$$\vec{B}_{ολ}(\Sigma_2) = \vec{B}_{αγ}(\Sigma_2) - \vec{B}_1(\Sigma_2) - \vec{B}_2(\Sigma_2),$$ όπου:

$$\vec{B}_{αγ}(\Sigma_2) = \frac{2\mu_0 I}{2\pi r}\hat{j} \quad (6)$$ (σύμφωνα με αυτά που είπαμε στο προηγούμενο ερώτημα), και:

$$\vec{B}_1(\Sigma_2) = \frac{\mu_0 I/2}{2\pi r'}\cos\theta\,\hat{j} + \frac{\mu_0 I/2}{2\pi r'}\sin\theta\,\hat{i},$$ ενώ:

$$\vec{B}_2(\Sigma_2) = \frac{\mu_0 I/2}{2\pi r'}\cos\theta\,\hat{j} - \frac{\mu_0 I/2}{2\pi r'}\sin\theta\,\hat{i},$$ όπου $r' = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$ (7). $\cos\theta = \frac{r}{r'}$

Άρα: $\vec{B}_1(\Sigma_2) + \vec{B}_2(\Sigma_2) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r'}\cos\theta\,\hat{j}$, & επομένως (από (7) & (6)):

$$\vec{B}_{ολ}(\Sigma_2) = \vec{B}_{αγ}(\Sigma_2) - [\vec{B}_1(\Sigma_2) + \vec{B}_2(\Sigma_2)] \Rightarrow$$

$$\vec{B}_{ολ}(\Sigma_2) = \frac{2\mu_0 I}{2\pi r}\hat{j} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r'}\cos\theta\,\hat{j} \Rightarrow$$

$$\vec{B}_{ολ}(\Sigma_2) = \frac{\mu_0 I}{\pi r}\hat{j} - \frac{\mu_0 I r}{2\pi r'^2}\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{ολ}(\Sigma_2) = \frac{\mu_0 I}{\pi r}\left(\frac{2r^2+a^2}{4r^2+a^2}\right)\hat{j}}$$

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορούσαν να κάνουν τις ενδιάμεσες αλγεβρικές πράξεις που οδηγούν στο τελικό αποτέλεσμα).