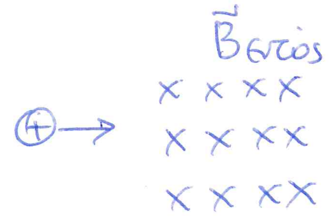
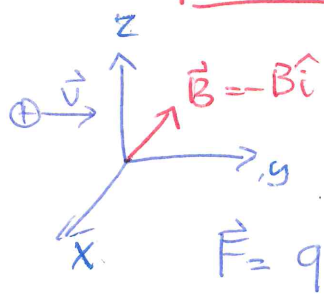
7^{o} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1 Προσδιορίστε την αρχική κατεύθυνση εκτροπής των φορτισμένων σωματιδίων καθώς εισέρχονται στα εικονιζόμενα μαγνητικά πεδία.

ΛΥΣΗ

α).





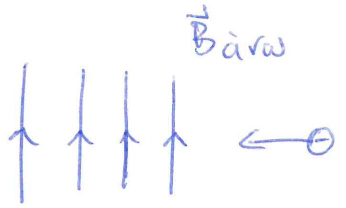
$\vec{v}_\oplus = v\hat{j}$

$\vec{F} = q(\vec{v}_\oplus \times \vec{B}) \Rightarrow$

$\vec{F} = q\left[v\hat{j} \times (-B\hat{i})\right] = qvB(\hat{i}\times\hat{j}) \Rightarrow$

$\vec{F} = qvB\hat{k}$.

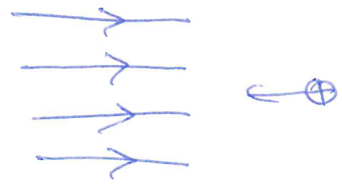
β).



$$\left.\begin{aligned}\vec{B} &= B\hat{k}\\ \vec{v} &= -v\hat{j}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F} = -q\,\vec{v}\times\vec{B} = -q(-v\hat{j}\times B\hat{k}) = qvB(\hat{j}\times\hat{k}) \Rightarrow$$

$\vec{F} = qvB\hat{i}$.

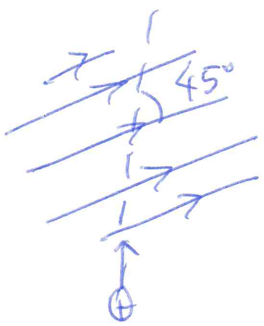
γ).



$$\left.\begin{aligned}\vec{B} &= B\hat{j}\\ \vec{v} &= -v\hat{j}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B} = q(-v\hat{j}\times B\hat{j}) \Rightarrow$$

$\vec{F} = \varnothing$.

δ).



$$\left.\begin{aligned}\vec{B} &= B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\\ \vec{v} &= v\hat{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$= q\vec{v}\times(B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

$= qvB_y(\hat{k}\times\hat{j}) + qvB_z\overset{\varnothing}{\cancel{(\hat{k}\times\hat{k})}}$

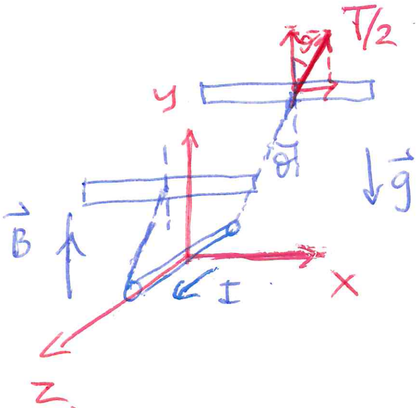
$= -qvB_y\hat{i} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{F} = -qvB_y\hat{i}}$$

Δύναμη προς τη σελίδα.

$\boxed{2}$ Μία μεταλλική ράβδος με μάζα λ ανά μονάδα μήκους διαρρέεται από ρεύμα Ι. Η ράβδος κρέμεται από δύο σύρματα και βρίσκεται μέσα σ' ένα ομογενές κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο. Όταν το σύστημα ισορροπεί, τα σύρματα σχηματίζουν γωνία θ ως προς την κατακόρυφο. Βρείτε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου.

ΛΥΣΗ



Έστω l το μήκος της ράβδου. Διαρρέεται από ρεύμα Ι, άρα δέχεται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο:

$$\vec{F}_B = I\vec{l}\times\vec{B}.$$

$$\vec{l} = l\hat{k}, \quad \vec{B} = B\hat{j}. \quad \text{άρα:}$$

$$\vec{F}_B = I\left(l\hat{k}\times B\hat{j}\right) = IlB\left(\hat{k}\times\hat{j}\right) \Rightarrow \vec{F}_B = -IlB\hat{i}.$$

Κατά μήκος του άξονα y:

$$\frac{T}{2}\cos\theta + \frac{T}{2}\cos\theta - mg = 0. \quad (1)$$

κατά μήκος του άξονα x:

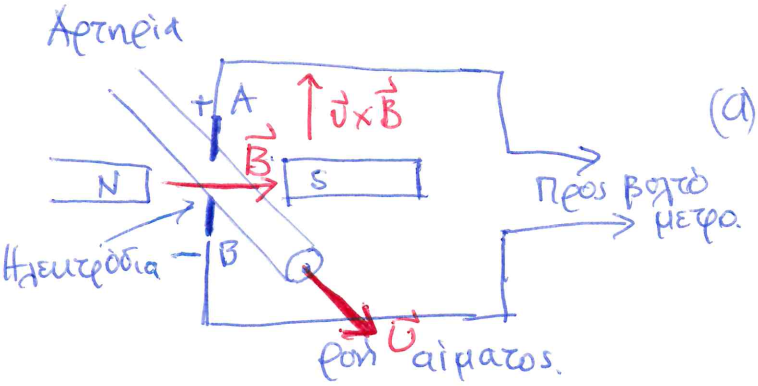
$$\frac{T}{2}\sin\theta + \frac{T}{2}\sin\theta - IlB = 0. \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} T\cos\theta - mg &= 0 \\ T\sin\theta - IlB &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{mg}{T} \\ \sin\theta &= \frac{IlB}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \frac{IlB}{mg} = \frac{IB}{g\underbrace{(m/l)}_{\lambda}} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\lambda g}{I}\tan\theta}$$

3 Ένας καρδιοχειρουργός παρακολουθεί την παροχή του αίματος σε μια αρτηρία χρησιμοποιώντας ένα ηλεκτρομαγνητικό ροόμετρο. Τα ηλεκτρόδια Α και Β έρχονται σε επαφή με την εξωτερική επιφάνεια του αιμοφόρου αγγείου, που έχει διάμετρο 3mm. (α) Αν το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι 0.04 T, τότε μεταξύ των ηλεκτροδίων αναπτύσσεται ΗΕΔ 160 μV. Υπολογίστε την ταχύτητα του αίματος. β) Εξηγήστε γιατί το ηλεκτρόδιο Α πρέπει να είναι θετικό, όπως φαίνεται στην εικόνα. γ) Το πρόσημο της ΗΕΔ εξαρτάται από το αν τα κινούμενα ιόντα που περιέχονται στο αίμα είναι στην πλειονότητά τους θετικά ή αρνητικά φορτισμένα; Εξηγήστε.

ΛΥΣΗ



(α) Φορτισμένα σωματίδια που κινούνται στο αίμα δέχονται δύναμη $q\vec{v}\times\vec{B}$ καθώς κινούνται. Οπότε συγκεντρώνονται στα άκρα της αρτηρίας, με αποτέλεσμα να δημιουργείται διαφορά δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων ΑΒ, κι άρα ηλεκτρικό πεδίο, E. Στην κατάσταση ισορροπίας:

$$qE = qvB \quad (\vec{v} + \vec{B} \text{ κάθετα}). \text{ Αφού: } E=\frac{\Delta V}{d},$$

θα έχουμε:

$$qvB = q\frac{\Delta V}{d} \Rightarrow v = \frac{\Delta V}{Bd} = \frac{160\,\mu V}{0.04T \cdot 3mm} \Rightarrow$$

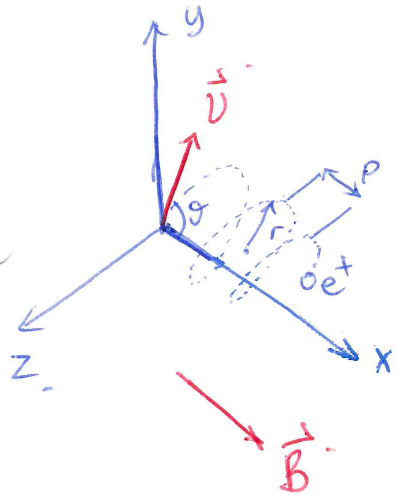
$$v = 1.33\ m/sec.$$

(β) Καθώς ιόντα κινούνται με τη συγκεκριμένη ταχύτητα $\vec{v}$, στο συγκεκριμένο μαγνητικό πεδίο, $\vec{B}$, η μαγνητική δύναμη $\vec{v}\times\vec{B}$ έχει φορά προς το Α. Άρα αυτό το ηλεκτρόδιο θα είναι πάντα θετικά φορτισμένο.

(γ). Όχι. Αρνητικά φορτία (όσα κι αν είναι), καθώς κινούνται σύμφωνα με τη φορά της $\vec{v}$, θα δέχονται δύναμη πάντα προς το ηλεκτρόδιο Β. Το ίδιο κι τα θετικά φορτισμένα ιόντα: θα δέχονται δύναμη προς το Α. Άρα, ανεξάρτητα με το αν η πλειονότητα των ιόντων είναι θετικά ή αρνητικά φορτισμένα, το σημείο Β θα έχει μικρότερο δυναμικό από το Α.

$\boxed{4}$ Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο με μέτρο 0.15T είναι προσανατολισμένο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Ένα ποζιτρόνιο εισέρχεται στο πεδίο με ταχύτητα μέτρου $5\times10^6 m/s$, και κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\theta=85^\circ$ με τον άξονα x. Η κίνηση του σωματιδίου θα είναι ελικοειδής. Υπολογίστε (α) το βήμα p και (β) την ακτίνα r της τροχιάς.

$\boxed{\text{ΛΥΣΗ}}$



α) Το "βήμα" της κίνησης είναι η απόσταση που διανύει το σωματίδιο σε κάθε περίοδο T.

$$T=\frac{2\pi m}{Bq},\quad B=0.15T,\quad m_{ποζιτρονίου}=9.11\times10^{-31} Kgr,\quad q_{ποζιτρονίου}=1.6\times10^{-19} C.$$

Άρα: $p=U_x T = U\cos(85^\circ)\cdot\frac{2\pi m}{Bq} \Rightarrow p=\dots=1.04\times10^{-4} m.$

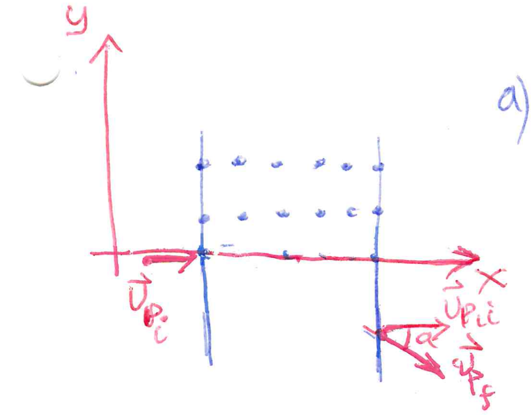
β). Η ακτίνα της τροχιάς είναι:

$$r=\frac{mU_\perp}{Bq}=\frac{mU\sin(85^\circ)}{Bq}\Rightarrow r=\dots=1.89\times10^{-4} m.$$

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να κάνετε τις πράξεις σωστά).

5 Πρωτόνια με κινητική ενέργεια 5 MeV ($1eV = 1.6\times10^{-19}$ J) κινούνται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x και εισέρχονται σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = 0.05\hat{k}$ T, που έχει κατεύθυνση έξω από τη σελίδα και εκτείνεται μεταξύ $x=0$ και $x=1m$. α) Παραβλέποντας τα σχετικιστικά φαινόμενα, βρείτε τη γωνία α που σχηματίζει το αρχικό διάνυσμα ταχύτητας της δέσμης πρωτονίων με το διάνυσμα της ταχύτητας μετά την έξοδο της δέσμης από το πεδίο. (β) Υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα της ορμής των πρωτονίων καθώς βγαίνουν από το μαγνητικό πεδίο.

ΛΥΣΗ



α) Μόλις τα πρωτόνια εισέρχονται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου, δέχονται δύναμη:

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = qvB \quad (\vec{v}\perp\vec{B}).$$

Τα πρωτόνια θα εκτελέσουν κυκλική κίνηση, άρα:

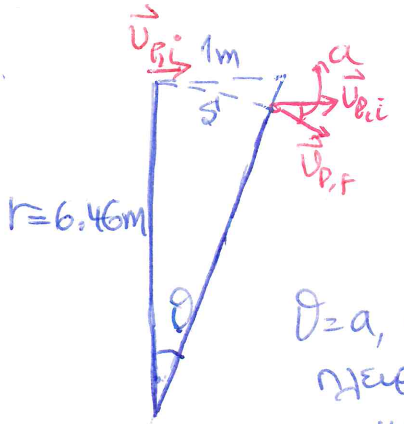
$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

Η ταχύτητα των πρωτονίων είναι τέτοια ώστε: $K = \frac{1}{2}mv^2 = 5MeV \Rightarrow$

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m_p}} \Rightarrow v = 3.1\times10^{7}\ m/s \quad (m = 1.67\times10^{-27} kgr).$$

Άρα:

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow r = 6.46\ m. \quad (q = 1.6\times10^{-19} C).$$



Αφού θ=α, ισχύει: $a = \frac{s}{r} \simeq \frac{1}{r} = 0.155$ rad $\rightarrow$

$$\boxed{a \simeq 8.9^\circ}$$

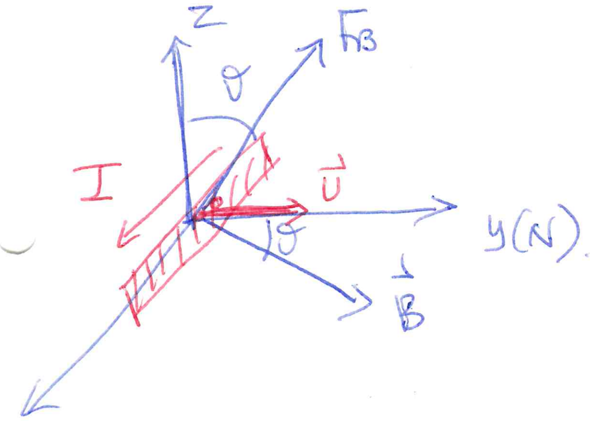
θ=α, επειδή οι πλευρές είναι κάθετες.

β) Η ορμή διατηρείται $|\vec{v}|$ = σταθερό. Αρχικά: $p = mv$. Στο τέλος: $v_y = -v\sin a$, άρα:

$$\vec{p}_y = -mv\sin a\,\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{p}_y = -8.\times10^{-21}\ kgr\,\frac{m}{s}\,\hat{j}}$$

6 Ένα σύρμα με γραμμική πυκνότητα μάζας 1g/cm τοποθετείται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια με συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.2. Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα 1.5 A με κατεύθυνση προς τα ανατολικά και ολισθαίνει οριζόντια προς το βορρά με σταθερή ταχύτητα. Βρείτε (α) το ελάχιστο μέτρο και (β) την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που μπορεί να προκαλέσει την κίνηση του σύρματος.

ΛΥΣΗ



Η δύναμη λόγω μαγνητικού πεδίου θα είναι:

$\vec{F_B} = I\vec{L}\times\vec{B} = IL\hat{i}\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}) = ILB_y(\hat{i}\times\hat{j}) + ILB_z(\hat{i}\times\hat{k}) \Rightarrow$

$$\vec{F_B} = F_{B,z}\hat{k} - F_{B,y}\hat{j}$$

όπου: $F_{B,z} = ILB_y$, $F_{By} = ILB_z$.

Ανεξαρτήτως του B_x, η $\vec{F_B}$ θα βρίσκεται στο επίπεδο zy.

Προφανώς, το πεδίο με το ελάχιστο μέτρο αναγκαίο για την $\vec{F_B}$, θα έχει $B_x=0$. Οπότε το διάνυσμα του $\vec{B}$ θα πρέπει να βρίσκεται στο επίπεδο z και y, άρα $\vec{B}\perp\vec{L}$, άρα:

$\vec{F_B} = ILB \Rightarrow B = \frac{F_B}{IL}$. Το μέτρο του B γίνεται ελάχιστο όταν το F_B είναι ελάχιστο.

Για να κινείται το σύρμα με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει:

$$F_B\sin\theta - f_{\tau\rho\iota\beta\acute{\eta}\varsigma} = 0 \Rightarrow F_B\sin\theta - N\cdot\mu = 0 \quad (1)$$

$N \equiv$ κάθετη δύναμη (μέτρο) από την επιφάνεια στο σύρμα.

Ισχύει:

$$F_B\cos\theta - mg + N = 0 \Rightarrow N = mg - F_B\cos\theta \quad (2)$$

Λόγω της (2), η (1) γράφεται:

$$F_B\sin\theta + F_B\cos\theta\,\mu = \mu m g \Rightarrow F_B = \frac{\mu m g}{\sin\theta + \mu\cos\theta}$$

Οπότε, η γωνία, θ, για την οποία F_B είναι ελάχιστο, θα βρεθεί από τη σχέση: $\frac{dF_B}{d\theta} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)$.

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να υπολογίσετε την παράγωγο σωστά). Άρα: $\theta = 78.7^\circ$ (για $\mu = 0.2$), και άρα:

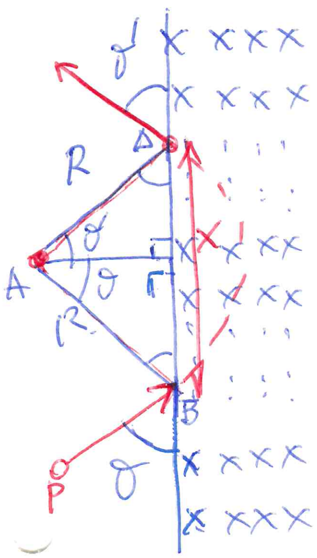
$$B = \frac{F_B}{IL} = \frac{\mu m g/(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{IL} = 0.128\,T$$

(για $\theta = 78.7^\circ$, $m/L = 1 gr/cm$, $I = 1.5 A$).

Άρα: το ελάχιστο μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι $0.128 T$, και η κατεύθυνση του πεδίου θα πρέπει να είναι προς το βορρά, με το φορέα του να σχηματίζει γωνία 78.7° με το επίπεδο xy.

7 Ένα πρωτόνιο που κινείται στο επίπεδο της σελίδας έχει κινητική ενέργεια 6 MeV. Ένα μαγνητικό πεδίο B= 1T έχει κατεύθυνση κάθετη στη σελίδα & προς τα μέσα. Όταν το πρωτόνιο εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο, το διάνυσμα της ταχύτητάς του σχηματίζει γωνία $\theta = 45°$ με το κατακόρυφο όριο του πεδίου, όπως φαίνεται στην εικόνα. (α) Βρείτε το x, δηλαδή την απόσταση του σημείου εισόδου του πρωτονίου στο πεδίο από το σημείο εξόδου του. (β) Βρείτε το θ', δηλαδή τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του πρωτονίου κατά την έξοδό του από το πεδίο με το κατακόρυφο όριο του πεδίου.

ΛΥΣΗ



$K = \frac{1}{2} m v^2 = 6\ MeV = 6 \times 10^6 eV \Rightarrow$

$K = 9.6 \times 10^{-13}\ J.$ $(1eV = 1.6 \times 10^{-19}\ J)$

Άρα: $v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 3.39 \times 10^7 \frac{m}{s}$.

Η δύναμη που δέχεται το πρωτόνιο έχει μέτρο: $F_B = qvB$, και λόγω της F_B το πρωτόνιο θα ακολουθήσει κυκλική τροχιά μόλις εισέλθει στο χώρο που υπάρχει το B. Άρα:

$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} = 0.354\ m.$ $(m = 1.67 \times 10^{-27}\ kgr,\ q = 1.6 \times 10^{-19}\ C)$

Ισχύει: $B\hat{A}\Gamma = \theta$ (έχουν κάθετες πλευρές), και άρα: $A\hat{B}\Gamma = 90° - \theta$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔAB, $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = 90° - \theta$, άρα:

$\Delta\hat{A}\Gamma = \theta$, οπότε: $\theta' = \theta$ (αφού $\theta' = \Delta\hat{A}\Gamma$, αφού οι πλευρές είναι κάθετες). Οπότε:

$x = 2R\sin(45°) = 0.5\ m.$