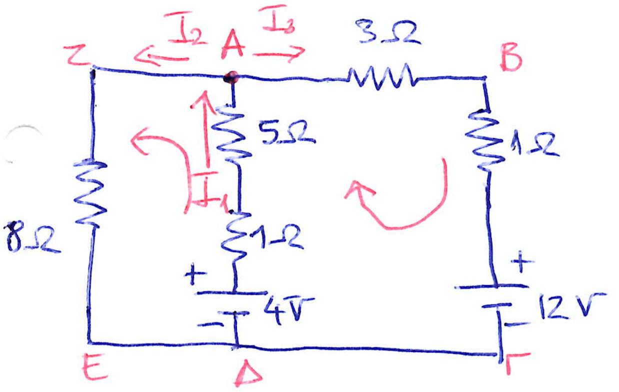
6º ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

1 Το κύκλωμα της εικόνας λειτουργεί για 2 λεπτά. (α) Βρείτε την τιμή του ρεύματος σε κάθε κλάδο του κυκλώματος. (β) Βρείτε την ενέργεια που αποδίδει κάθε μπαταρία. (γ) Βρείτε την ενέργεια που αποδίδεται σε κάθε αντιστάτη. (δ) προσδιορίστε το είδος του μετασχηματισμού ενέργειας που συμβαίνει κατά τη λειτουργία του κυκλώματος. (ε) Βρείτε το συνολικό πόσο ενέργειας που μετασχηματίζεται σε εσωτερική ενέργεια στους αντιστάτες.



ΛΥΣΗ

α). Εφαρμόζω τους κανόνες του Kirchoff στους βρόχους ΑΒΓΔ και ΑΔΕΖ, διατρέχοντάς τους με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, και στο σημείο Α:

$$\left.\begin{aligned} & I_1 = I_2 + I_3 \\ & -I_3 4 - 12 + 4 - I_1 6 = \phi \\ & -I_2 8 + 4 - I_1 6 = \phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{matrix}3 \text{ εξισώσεις} \\ 3 \text{ άγνωστοι}\end{matrix}\right) \Rightarrow \begin{aligned} I_1 &= -462\,mA \\ I_2 &= 0.848\ A \\ I_3 &= -1.31\,A. \end{aligned}$$

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να εκτελέσετε τις πράξεις).

(Τα $I_1 + I_3$ έχουν αντίθετη φορά από αυτή που φαίνεται στο σχήμα)

β). Η ισχύς της κάθε μπαταρίας δίνεται από τη σχέση: $P = I\cdot\Delta V$, οπότε η ενέργεια που αποδίδουν στο κύκλωμα σε χρόνο $t = 2\,min = 60\ sec$, είναι: $E = I\,\Delta V\,120s$

Για την μπαταρία 12V: $P_{12V} = 15.7\ W$, άρα: $E_{12V} = 1886\ J$.

Όμως, το ρεύμα διατρέχει την 4V μπαταρία από το θετικό προς τον αρνητικό πόλο, άρα: $P_{4V} = 0.426A(-4V) = -1848\ W$.

Κι άρα, η ενέργεια που καταναλώνει η 4V μπαταρία είναι:

$E_{4V} = -222\ J$. (Η μπαταρία φορτίζεται).

(γ) Η ισχύς που αποδίδεται σε κάθε αντιστάτη είναι:

$P_R = I^2 R$, κ η ενέργεια που καταναλώνεται: $E_R = P_R \cdot t$.

Άρα: (ΑΔΕΖ): $E_{1\Omega} = 25.6$ J

$E_{5\Omega} = 128$ J

$E_{8\Omega} = 690$ J.

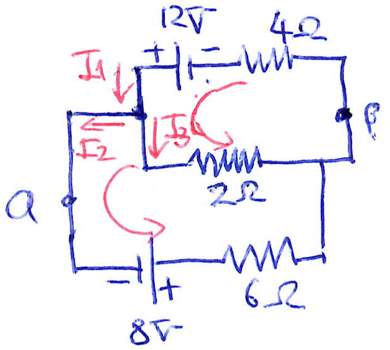
(ΑΒΓΔ): $E_{1\Omega} = 206$ J

$E_{3\Omega} = 618$ J.

(δ) + (ε), Θεωρία.

2 Για το κύκλωμα της εικόνας υπολογίστε (α) το ρεύμα στον αντιστάτη των $2\,\Omega$ και (β) τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων α και β.

ΛΥΣΗ

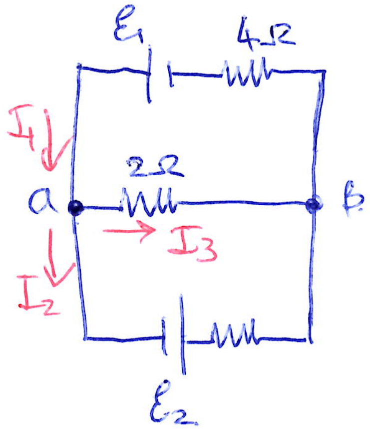


(α)

Ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I_2 + I_3 \\ \mathcal{E}_1 - I_3(2\Omega) - I_1(4\Omega) = 0 \\ \mathcal{E}_2 - I_2(6\Omega) + 2I_3 \end{array}\right\} \Rightarrow I_3 = 909\,mA.$$

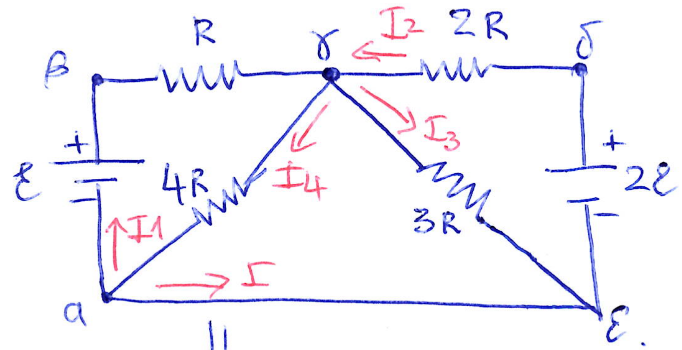
(β). Το παραπάνω κύκλωμα μπορεί να σχεδιαστεί:



Άρα: $V_\beta - V_\alpha (= \Delta V) = -I_3 \cdot (2\Omega) = -1.82\,V.$

3 Αν $R = 1\,k\Omega$ & $\mathcal{E} = 250V$ στην εικόνα, προσδιορίστε τη φορά και την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το οριζόντιο σύρμα μεταξύ των σημείων α και ε.

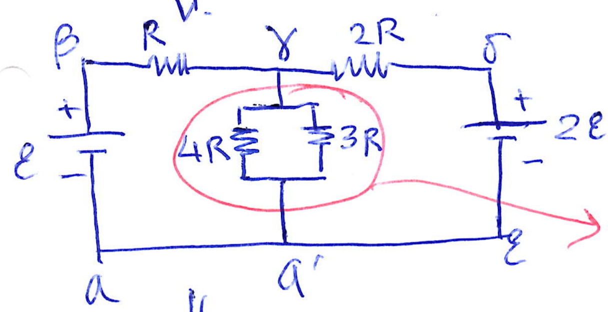
ΛΥΣΗ



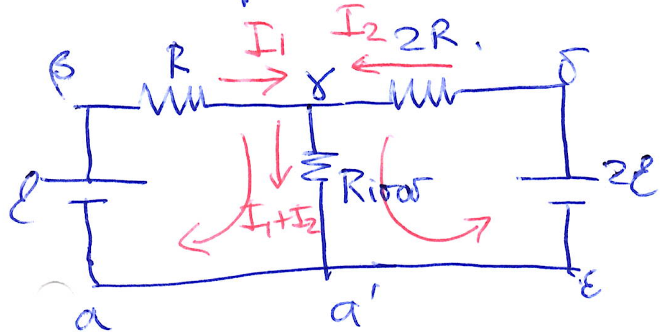
Στον κόμβο α:

$$\boxed{I_4 = I_1 + I} \quad (1)$$

Άρα για να υπολογίσω το I, θα πρέπει να υπολογίσω τα I_1 και I_4.



$$\frac{1}{R_{ισ}} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{3R} \Rightarrow R_{ισοδ} = 1.71R.$$



βρόχοι: αβγα', γδεα', & κόμβος γ:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{E} - I_1R - (I_1+I_2)(1.71R) = 0 \\ &2\mathcal{E} - 2RI_2 - (I_1+I_2)(1.71R) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

(δύο εξισώσεις, δύο άγνωστοι:) $\boxed{I_1 = 10\,mA}$ (2), $I_2 = 130\,mA$.

Ισχύει: $V_γ - V_α = V_γ - V_{α'} = (I_1+I_2)(1.71R) = 240V$.

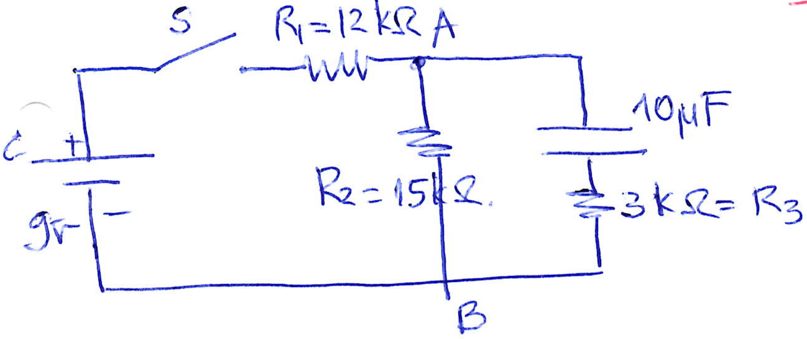
Άρα $I_4 = \dfrac{V_γ - V_α}{4R} = 60mA \Rightarrow \boxed{I_4 = 60mA}$ (3).

Από (2), (1) και (3) έχουμε:

$$I = I_4 - I_1 \Rightarrow \boxed{I = 50mA} \quad (4)$$

4. Στην εικόνα υποθέτουμε ότι ο διακόπτης έχει παραμείνει κλειστός για αρκετό χρονικό διάστημα ώστε να έχει φορτισθεί πλήρως ο πυκνωτής. Βρείτε (α) το ρεύμα σταθερής κατάστασης σε κάθε αντιστάτη και (β) το φορτίο Q του πυκνωτή. (γ) Ανοίγουμε τον διακόπτη τη χρονική στιγμή $t=0$. Γράψτε την εξίσωση ρεύματος στον R_2, ως συνάρτηση του χρόνου και (δ) βρείτε το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να μειωθεί το φορτίο του πυκνωτή στο ένα πέμπτο της αρχικής τιμής του.

ΛΥΣΗ



(α) ρεύμα σταθερής κατάστασης:
Για R_3, $I_3=0$. Δεν διαρρέεται από ρεύμα, λόγω πυκνωτή.

Για την R_1+R_2: Αντιστάτες συνδεμένοι σε σειρά, άρα $R_{ισοδ}=R_1+R_2=27\ k\Omega$,

και επομένως: $I_{(R_1+R_2)}=\dfrac{\varepsilon}{R_1+R_2}=333\ \mu A$.

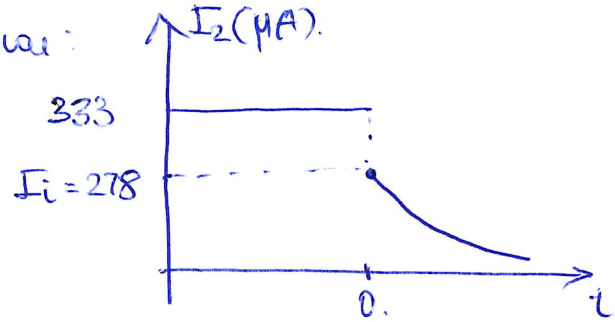
(β) Η διαφορά δυναμικού $(\Delta V)_C$ στα άκρα του πυκνωτή είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού στα άκρα της R_2, που είναι ίση με $I_{(R_1+R_2)}\cdot R_2$, άρα:

$$Q=C(\Delta V)_C=C\,I_{(R_1+R_2)}R_2=\ldots=50\ \mu C.$$

(γ) Ανοίγουμε το διακόπτη τη χρονική στιγμή $t=0$. Το τμήμα του κυκλώματος που έχει τον R_1 δεν διαρρέεται πια από ρεύμα. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται μέσω των R_2+R_3. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι: $\tau=R_{ολ}C=(R_1+R_2)C=\ldots=0.18\ s$. Σύμφωνα με τη θεωρία: $I(t)=I_{max}e^{-t/\tau}$, όπου I_{max} είναι το αρχικό ρεύμα που διαρρέει το τμήμα του κυκλώματος με τους R_2 και R_3, I_i. Αυτό είναι ίσο με:

$$I_{max} = I_i = \frac{(\Delta V)_c}{R_2+R_3} = \frac{I_{(R_1+R_2)}\, R_2}{R_2+R_3} = \dots = 278\,\mu A.$$

Οπότε το διάγραμμα της μεταβολής του I μέσω του R_2, είναι:



μόλις ανοίξει ο διακόπτης, το I_2 ελαττώνεται ακαριαία από 333 σε 278 μA. Και μετά εκθετικά:

$$I_{R_2}(t) = (278\,\mu A)\, e^{-t/(0.18s)}.$$

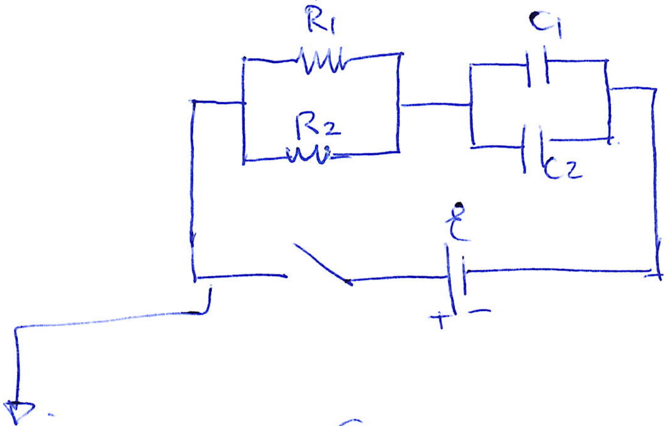
γ). Το φορτίο στον πυκνωτή ελαττώνεται σύμφωνα με τη σχέση: $q(t) = Q_{max} e^{-t/\tau} \Rightarrow$

$$\frac{Q_{max}}{5} = Q_{max}\, e^{-t/\tau} \Rightarrow e^{+t/\tau} = 5 \Rightarrow$$

$$t = (0.18s) \ln 5 \Rightarrow t = 0.29\,s.$$

5 Το κύκλωμα της εικόνας περιλαμβάνει δύο αντιστάτες, $R_1 = 2\,k\Omega$ και $R_2 = 3\,k\Omega$, και δύο πυκνωτές, $C_1 = 2\mu F$ και $C_2 = 3\mu F$, που συνδέονται με μια μπαταρία ΗΕΔ $\mathcal{E} = 120V$. Αν οι πυκνωτές είναι αφόρτιστοι πριν το κλείσιμο του διακόπτη S, βρείτε τα φορτία των πυκνωτών (α) C_1 και (β) C_2 συναρτήσει του χρόνου, μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

ΛΥΣΗ



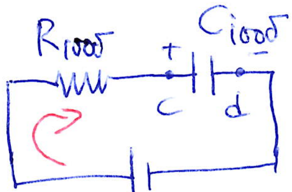
Το αρχικό κύκλωμα μπορεί να απλοποιηθεί, ως:

$$\frac{1}{R_{ισοδ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow$$

$$R_{ισοδ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.2\,k\Omega.$$

και $C_{ισοδ} = C_1 + C_2 = 5\,\mu F$.

Άρα:



Επομένως: $\mathcal{E} - I R_{ισοδ} - \Delta V_{cd} = 0$,

όπου $I = I_{max} e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R_{ισοδ}} \cdot e^{-t/\tau}$. Οπότε:

$$\Delta V_{cd} = \mathcal{E} - I R_{ισοδ} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{\cancel{R_{ισοδ}}} \cdot e^{-t/\tau} \cancel{R_{ισοδ}} \Rightarrow \Delta V_{cd} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau}).$$

$$\tau = R_{ισοδ} \cdot C_{ισοδ} = \dots = 6 \times 10^{-3}.$$

ΔV_{cd} είναι η διαφορά δυναμικού που "βλέπει" ο καθε πυκνωτής. Άρα:

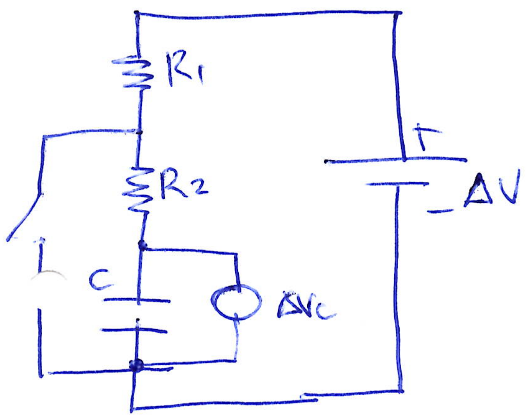
$$q_1(t) = C_1 \Delta V_{cd} = \dots = 240\mu C\left(1 - e^{-1000t/6}\right).$$

Και:

$$q_2(t) = C_2 \Delta V_{cd} = \dots = 360\mu C\left[1 - e^{-1000t/6}\right]$$

6 Ο διακόπτης της εικόνας ανοίγει όταν $\Delta V_c = \frac{\Delta V}{3}$, και κλείνει όταν $\Delta V_c = \frac{2}{3}\Delta V$. Το ιδανικό βολτόμετρο μετρά τη διαφορά δυναμικού που φαίνεται στο γράφημα της εικόνας. Ποια είναι η περίοδο T της κυματομορφής συναρτήσει των R_1, R_2, και C;

ΛΥΣΗ



α). Διακόπτης ανοιχτός = φόρτιση πυκνωτή

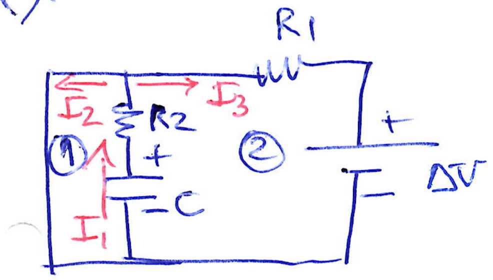
Άρα: $\Delta V - I(R_1+R_2) - \Delta V_c(t) = 0 \Rightarrow$

$$\Delta V_c(t) = \Delta V - \frac{\Delta V}{\cancel{R_1+R_2}} e^{-t/\tau}\cancel{(R_1+R_2)} \Rightarrow$$

$$\Delta V_c(t) = \Delta V\left(1-e^{-t/\tau}\right),$$

$\Delta V_c(t)$ είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή, & αυξάνεται με το χρόνο ($\tau = (R_1+R_2)C$).

β). Διακόπτης κλειστός, ο πυκνωτής εκφορτίζεται:



βρόχος 1: $\Delta V_c - I_1 R_2 = 0 \Rightarrow \Delta V_c = I_1 R_2$

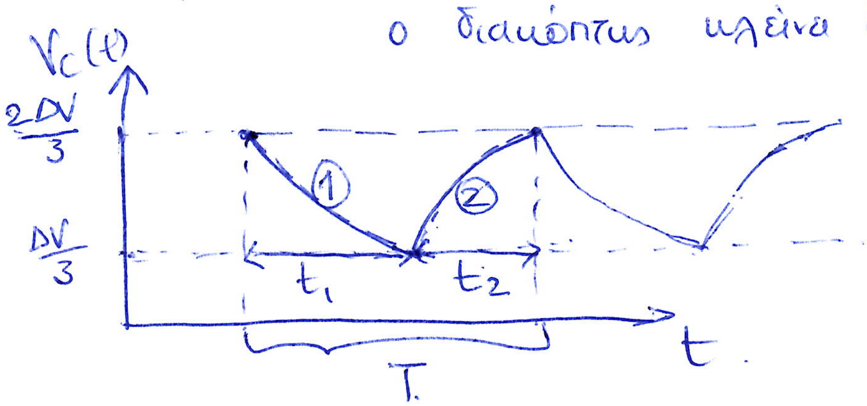
όπου $I_1 = \frac{Q_{max}}{R_2 C} e^{-t/\tau'}$ ($\tau' = R_2 C$), άρα:

$$\Delta V_c = I_1 R_2 = \frac{Q_{max}}{\cancel{R_2} C} e^{-t/\tau'} \cancel{R_2} \Rightarrow$$

$\Delta V_c = \Delta V_{c\,max} e^{-t/\tau'}$. Άρα, η τάση μειώνεται με το χρόνο

Επομένως: ο διακόπτης ανοίγει όταν $\Delta V_c = \frac{\Delta V}{3}$ (η V_c αυξάνεται).

ο διακόπτης κλείνει όταν $\Delta V_c = \frac{2\Delta V}{3}$ (η V_c μειώνεται).



Την περίοδο 1, εκφόρτιση πυκνωτή

$$\Delta V_C(t) = \Delta V_{C,max} e^{-t/\tau'} = \frac{2\Delta V}{3} e^{-t/\tau'} \quad (1)$$

Την περίοδο 2, φόρτιση πυκνωτή:

$$V_C(t) = \Delta V(1 - e^{-t/\tau}). \quad (2)$$

Ο χρόνος t_1, είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να μειωθεί η τάση απο $\frac{2\Delta V}{3}$ σε $\Delta V_C = \frac{V}{3}$. Από (1) έχουμε:

$$\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{\Delta V} = \frac{2\cancel{\Delta V}}{\cancel{3}} e^{-t/\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{t_1}{R_2 C} \Rightarrow t_1 = \ln(2) . R_2 C . (3)$$

Ο χρόνος t_2 είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να αυξηθεί η τάση από $\frac{\Delta V}{3}$ σε $\frac{2\Delta V}{3}$. Από (2) έχουμε:

$$\frac{\cancel{\Delta V}}{3} = \cancel{\Delta V}\left(1 - e^{-\frac{t_{\Delta V/3}}{\tau}}\right) \Rightarrow \ldots \ln\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{t_{\Delta V/3}}{\tau} \Rightarrow$$

$$t_{\Delta V/3} = \tau \ln(3/2).$$

και $\frac{2\cancel{\Delta V}}{3} = \cancel{\Delta V}\left(1 - e^{-\frac{t_{2\Delta V/3}}{\tau}}\right) \Rightarrow \ldots \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{t_{2\Delta V/3}}{\tau} \Rightarrow$

$$t_{2\Delta V/3} = \tau \ln(3).$$ Άρα:

$$t_2 = \tau \ln(3) - \tau \ln(3/2) = \tau \ln\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}/2}\right) \Rightarrow t_2 = \tau \ln(2) \Rightarrow$$

$$t_2 = (R_1 + R_2) C \ln(2).$$ Άρα:

$$T = t_1 + t_2 = R_2 C \ln(2) + (R_1 + R_2) C \ln(2) \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \ln(2) C (R_1 + 2R_2).}$$