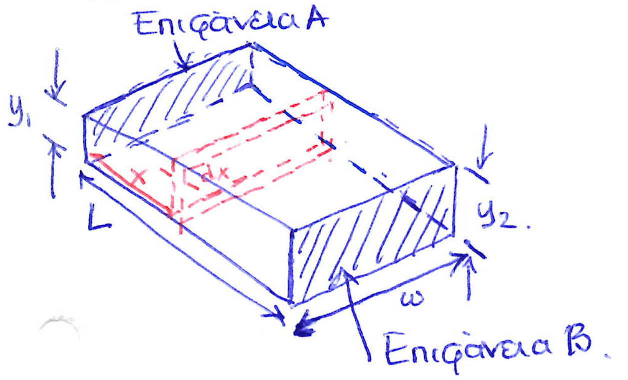
5ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1 Κατασκευάζουμε σφήνα με υλικό σταθερής ειδικής αντίστασης ρ. Βρείτε την ηλεκτρική αντίσταση μεταξύ των επιφανειών A και B της σφήνας.



ΛΥΣΗ

Θεωρώ στοιχειώδες τμήμα του σώματος, έστω σε απόσταση x από την επιφάνεια A, πάχους dx, & επιφάνειας βάσης:

$$A(x) = w \cdot \left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{L} x \right).$$

Γι' αυτό το τμήμα, η αντίσταση είναι: $dR = \rho \dfrac{dx}{A(x)}$.

Άρα η συνολική αντίσταση, R, της σφήνας είναι:

$$R = \int_0^L \rho \frac{dx}{w\left(y_1 + \frac{y_2-y_1}{L} x\right)} \Rightarrow$$

$$R = \frac{\rho}{w} \frac{L}{y_2 - y_1} \int_0^L \frac{d\left(y_1 + \frac{y_2-y_1}{L} x\right)}{\underbrace{\left(y_1 + \frac{y_2-y_1}{L} x\right)}_{X}} \Rightarrow$$

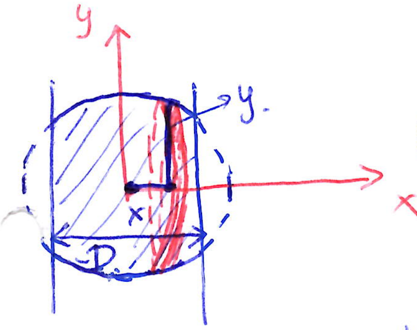
$$R = \frac{\rho}{w} \frac{L}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dX}{X} \Rightarrow \ldots$$

(πράξεις που οι φοιτητές πρέπει να μπορείτε να κάνετε)

$$\boxed{R = \frac{\rho L}{w(y_2 - y_1)} \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}.$$

2 Σε σφαίρα από υλικό σταθερής ειδικής αντίστασης ϱ και ακτίνας R έχουμε λειάνει δύο αντίθετα τμήματα έτσι ώστε αυτά να αποτελούν όμοιες παράλληλες επίπεδες επιφάνειες. Η απόσταση μεταξύ αυτών των επίπεδων επιφανειών είναι D. (a) Βρείτε μία έκφραση για την αντίσταση μεταξύ των δύο επίπεδων επιφανειών. (b) Τι συμβαίνει στην αντίσταση καθώς το D τείνει προς το μηδέν; (c) Τι συμβαίνει στην αντίσταση καθώς το D τείνει προς την τιμή 2R;

ΛΥΣΗ



(a) Θεωρώ στοιχειώδη δίσκο, σε απόσταση x από το κέντρο της σφαίρας, πάχους dx, & επιφάνειας: $\pi y^2(x)$. Γι αυτό τον δίσκο,

$$dR = \varrho \frac{dx}{A(x)} = \frac{\varrho\, dx}{\pi y^2(x)}.$$

Ισχύει: $x^2 + y^2 = \underset{\text{ακτίνα σφαίρας}}{R^2} \Rightarrow y^2 = R^2 - x^2$, οπότε:

$$dR = \frac{\varrho\, dx}{\pi(R^2 - x^2)} \Rightarrow R_{σφαίρας} = \frac{\varrho}{\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{dx}{R^2 - x^2} \Rightarrow$$

$$R_{σφ} = \frac{\varrho}{\pi}\, \frac{\tanh^{-1}(x/R)}{R}\Bigg|_{-D/2}^{D/2} \Rightarrow \boxed{R_{σφ} = \frac{\varrho}{\pi R} \ln\left(\frac{2R + D}{2R - D}\right)}$$

Ισχύουν: $\int \frac{dx}{a - x^2} = \frac{\tanh^{-1}(x/\sqrt{a})}{\sqrt{a}}$, και: $\tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+z) - \ln(1-z)\right]$.

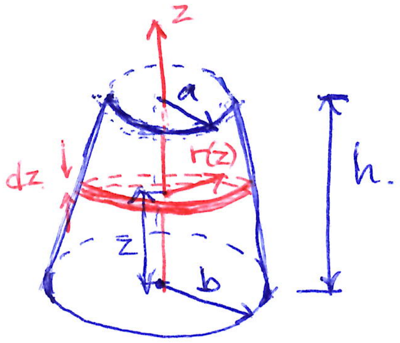
(οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να κάνετε τις ενδιάμεσες πράξεις).

(b) $\lim_{D \to \phi} (R_{σφ}) = \phi$. (αναμενόμενο).

(c) $\lim_{D \to 2R} (R_{σφ}) = \infty$. (? θα πρέπει να μπορείτε να τα εξηγήσετε).

3. Ένα στερεό αποτελείται από υλικό ειδικής αντίστασης ρ και έχει σχήμα κόλουρου κώνου, ύψους h. Η κάτω βάση έχει ακτίνα b και η άνω ακτίνα a. Εάν υποτεθεί ότι η πυκνότητα ρεύματος είναι σταθερή σε οποιαδήποτε κυκλική διατομή του κώνου, αποδείξτε ότι η αντίσταση μεταξύ των δύο βάσεων είναι:

$$R = \frac{\rho}{\pi}\left(\frac{h}{ab}\right).$$



ΛΥΣΗ

Στοιχειώδης δίσκος, σε ύψος z από την κάτω βάση, πάχους dz & εμβαδού: $\pi r^2(z)$, όπου: $r(z) = b - \left(\frac{b-a}{h}\right)z$. Άρα:

$$dR = \frac{\rho\,dz}{A(z)} = \frac{\rho\,dz}{\pi r^2(z)} = \frac{\rho\,dz}{\pi\left[b-\left(\frac{b-a}{h}\right)z\right]^2} \Rightarrow$$

$$R = \int dR = \rho\int_0^h \frac{dz}{\pi\left[b-\left(\frac{b-a}{h}\right)z\right]^2} \Rightarrow \ldots \quad \boxed{R = \frac{\rho}{\pi}\,\frac{h}{ab}}$$

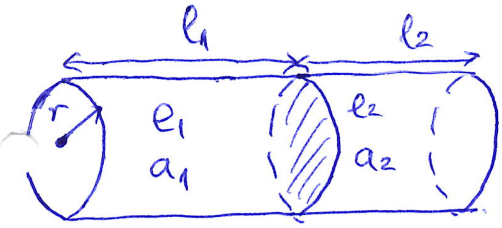
Ισχύει:

$$\int \frac{dx}{(ax+\beta)^2} = \frac{1}{a(ax+\beta)} + c.$$

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να εκτελέσετε τις ενδιάμεσες πράξεις).

4 Ένας μηχανικός χρειάζεται μία αντίσταση η οποία να έχει ολικό θερμικό συντελεστή αντίστασης ίσο με μηδέν στους 0°C. Το σχέδιο της αντίστασης αποτελείται από δύο κυλίνδρους διαφορετικών υλικών. Ο λόγος των ειδικών αντιστάσεων των δύο υλικών (σε θερμοκρασία T_0) είναι: $\rho_{01}/\rho_{02} = 3.2$ και ο λόγος των μηκών των αντιστοίχων τμημάτων είναι $l_1/l_2 = 2.6$. Η ακτίνα r είναι σταθερή σ' όλο το μήκος της αντίστασης. Εάν υποτεθεί ότι η θερμοκρασία των δύο τμημάτων είναι ίδια, υπολογίστε τον απαιτούμενο λόγο a_1/a_2, όπου a_1 και a_2 είναι οι θερμικοί συντελεστές ειδικής αντίστασης των δύο υλικών.

ΛΥΣΗ



Ισχύουν:

$$\rho = \rho_0\,[1 + a(T - T_0)] \Rightarrow a = \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta\rho}{\Delta T}$$

και:

$$R = R_0\,[1 + a(T - T_0)] \Rightarrow a = \frac{1}{R_0}\frac{\Delta R}{\Delta T} \quad (1).$$

Η ολική αντίσταση των δύο κυλίνδρων είναι: $R = R_1 + R_2$. (2).
Με βάση την (1), αφού ο ολικός θερμικός συντελεστής των δύο κυλίνδρων είναι μηδέν, τότε για μικρά ΔT γύρω από τους 0°C, $\Delta R = 0$ (από την (1)). Άρα:

$$\Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2 = 0 \Rightarrow a_1 R_{01}\Delta T + a_2 R_{02}\Delta T = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 R_{01} + a_2 R_{02} = 0 \Rightarrow a_1 \frac{\rho_{01} l_1}{A} + a_2 \frac{\rho_{02} l_2}{A} = 0 \Rightarrow$$

και τα δύο ίσα με πr^2

$$a_1 \rho_{01} l_1 = -a_2 \rho_{02} l_2 \Rightarrow$$

$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{\rho_{02} l_2}{\rho_{01} l_2} \Longrightarrow \boxed{\frac{a_1}{a_2} = -0.12}$$

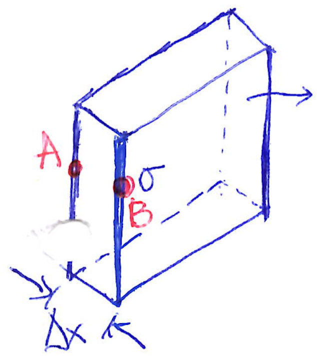
5 Η ροή ενέργειας μέσω θερμότητας λόγω θερμοκρασιακής διαφοράς και η ροή ηλεκτρικού φορτίου λόγω διαφοράς δυναμικού παρουσιάζουν ομοιότητες. Στα μέταλλα, τόσο η ενέργεια dQ όσο και το ηλεκτρικό φορτίο dq μεταφέρονται μέσω των ελεύθερων ηλεκτρονίων. Άρα, οι καλοί αγωγοί του ηλεκτρισμού είναι συνήθως και καλοί αγωγοί της θερμότητας. Θεωρήστε ότι έχετε μία λεπτή αγώγιμη πλάκα με πάχος dx, εμβαδόν A, ηλεκτρική ειδική αγωγιμότητα σ, ενώ μεταξύ των απέναντι όψεών της η διαφορά δυναμικού είναι dV. (α) Δείξτε ότι το ρεύμα $I = \frac{dq}{dt}$ δίνεται από την εξίσωση που αναφέρεται στα αριστερά:

$$\frac{dq}{dt} = \sigma A \left|\frac{dV}{dx}\right| \qquad\qquad \frac{dQ}{dt} = kA\left|\frac{dT}{dx}\right|$$

αγωγιμότητα φορτίου — Θερμική αγωγιμότητα

Στην παραπλήσια εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας, που αναφέρεται στα δεξιά, για ένα υλικό με θερμική αγωγιμότητα k, ο ρυθμός ροής ενέργειας μέσω θερμότητας dQ/dt (σε joule/sec στο SI) οφείλεται στη βαθμίδα θερμοκρασίας dT/dx. (β) Διατυπώστε αντίστοιχους κανόνες που συσχετίζουν την κατεύθυνση του ηλεκτρικού ρεύματος με τη μεταβολή του δυναμικού και την κατεύθυνση της ροής ενέργειας με τη μεταβολή της θερμοκρασίας.

ΛΥΣΗ



Επιφάνεια A.

(α)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta V (= V_B - V_A) = -E\,\Delta x \\ \text{και: } \Delta V = IR. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I\left(= \frac{dq}{dt}\right) = \frac{E\Delta x}{R} = \frac{A}{\varrho\,\cancel{\Delta x}} \cdot E\,\cancel{\Delta x} \Rightarrow$$

$$I = \sigma A E = -\sigma A \frac{\Delta V}{\Delta x} \Rightarrow \left|\frac{dq}{dt}\right| = \sigma A \left|\frac{dV}{dx}\right|.$$

(β). Ο ρυθμός ροής φορτίου οφείλεται στη βαθμίδα δυναμικού $\frac{dV}{dx}$. Η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος είναι προς την κατεύθυνση στην οποία ελαττώνεται το δυναμικό.

Ο ρυθμός ροής ενέργειας μέσω θερμότητας οφείλεται στη βαθμίδα θερμοκρασίας. Η θερμότητα (ενέργεια) μεταφέρεται προς την κατεύθυνση που ελαττώνεται η θερμοκρασία.