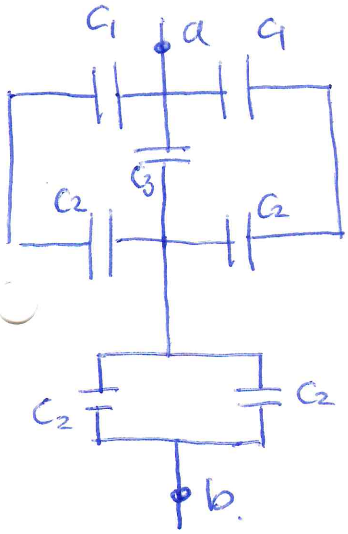
4ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1 Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των σημείων a και b για την ομάδα των πυκνωτών που συνδέονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

ΛΥΣΗ



$C_1 = 5\mu F$

$C_2 = 10\mu F$

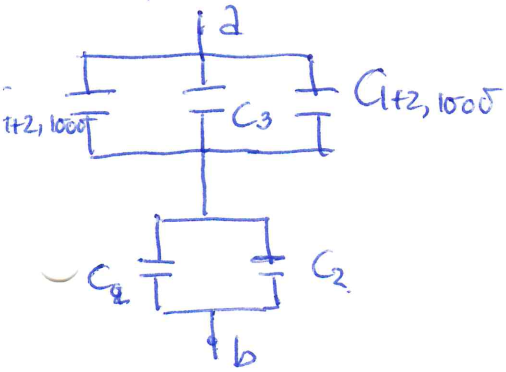
$C_3 = 2\mu F$

Οι πυκνωτές $C_1 + C_2$ είναι συνδεδεμένοι σε σειρά στο πάνω μέρος του κυκλώματος. Άρα, μπορούν να αντικατασταθούν με ένα πυκνωτή χωρητικότητας:

$$\frac{1}{C_{1+2,\iota\sigma o\delta}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Longrightarrow$$

$$C_{1+2,\iota\sigma o\delta} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = 3.33\ \mu F.$$

Επομένως, η συνδεσμολογία παραπάνω είναι ισοδύναμη με την παρακάτω:



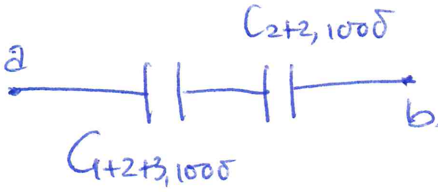
Οι $C_{1+2,\iota\sigma o\delta}$ και C_3 είναι παράλληλα συνδεμένοι, Άρα:

$$C_{1+2+3,\iota\sigma o\delta} = 2 \cdot C_{1+2,\iota\sigma o\delta} + C_3 = 8{,}66\ \mu F.$$

Το ίδιο κι οι C_2 στο κάτω μέρος του κυκλώματος, άρα:

$$C_{2+2,\iota\sigma o\delta} = 2 \cdot C_2 = 20\mu F.$$

Οπότε, η αρχική συνδεσμολογία είναι ισοδύναμη με δύο πυκνωτές συνδεμένους σε σειρά:

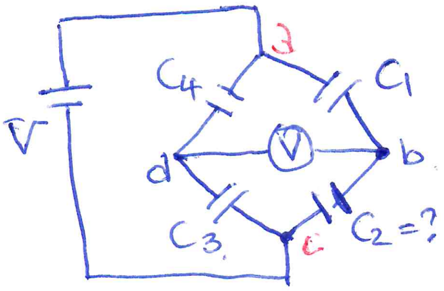


Οπότε:

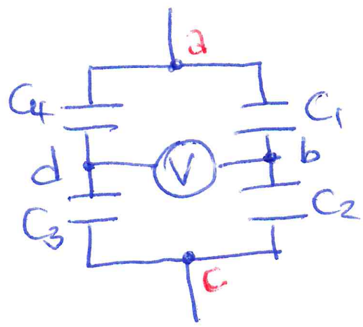
$$C_{\iota\sigma o\delta,\tau\varepsilon\lambda} = \left(\frac{1}{C_{1+2+3,\iota\sigma o\delta}} + \frac{1}{C_{2+2,\iota\sigma o\delta}}\right)^{-1} = 6.04\ \mu F.$$

2 Στη συνδεσμολογία που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, εφαρμόζεται τάση V και ο πυκνωτής C_1 ρυθμίζεται έτσι ώστε το ηλεκτροστατικό βολτόμετρο μεταξύ των σημείων b και d να δείχνει μηδέν. Αυτή η «ισορροπία» συμβαίνει όταν $C_1 = 4\mu F$. Αν $C_3 = 9\mu F$ και $C_4 = 12\mu F$, υπολογίστε την τιμή της C_2.

ΛΥΣΗ



Η συνδεσμολογία δίπλα είναι ισοδύναμη με την παρακάτω:



Άρα οι $C_3 + C_4$, καθώς κ' οι $C_1 + C_2$ είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Άρα:

$Q_1 = Q_2$ (1).

$Q_4 = Q_3$ (2).

Αφού $\Delta V_{db} = 0$, θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta V_{da} + \Delta V_{ab} = 0 \\ \text{και } \Delta V_{dc} + \Delta V_{cb} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |\Delta V_{da}| = |\Delta V_{ab}| \\ |\Delta V_{dc}| = |\Delta V_{cb}| \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{Q_4}{C_4} = \dfrac{Q_1}{C_1} \quad (3) \\ \dfrac{Q_3}{C_3} = \dfrac{Q_2}{C_2} \quad (4). \end{array}$$

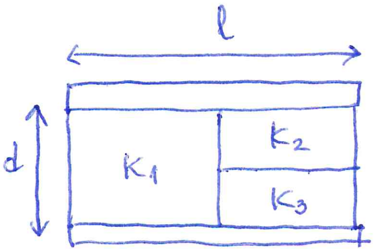
Από (4): $C_2 = \dfrac{C_3 Q_2}{Q_3} \xlongequal{(\text{λόγω } (1))} \dfrac{C_3 Q_1}{Q_3} \xlongequal{(\text{λόγω } (3))} \dfrac{C_3}{Q_3} \cdot \dfrac{Q_4}{C_4} C_1 \Rightarrow$

$C_2 = \dfrac{C_3 C_1}{C_4}$ (αφού $Q_4 = Q_3$) $\Rightarrow$ $\boxed{C_2 = 3\mu F.}$

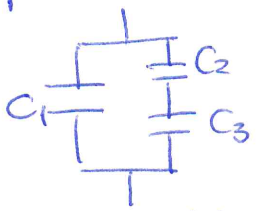
3

Ένας επίπεδος πυκνωτής είναι κατασκευασμένος με τη βοήθεια τριών διηλεκτρικών υλικών. (a) Βρείτε μια έκφραση για τη χωρητικότητα του πυκνωτή ως συνάρτηση του εμβαδού του οπλισμού A και των $d, k_1, k_2,$ και k_3. (b) Υπολογίστε τη χωρητικότητα χρησιμοποιώντας τις τιμές $A = 1cm^2$, $d = 2mm$, $k_1 = 4{,}9$, $k_2 = 5.6$ και $k_3 = 2.1$

ΛΥΣΗ



Ο πυκνωτής δίπλα, αντιστοιχεί ουσιαστικά στην εξής συνδεσμολογία:



Όπου: $C_1 = k_1 C_0 = k_1 \varepsilon_0 \dfrac{A'}{d} = k_1 \varepsilon_0 \dfrac{A/2}{d} \Rightarrow \quad C_1 = \varepsilon_0 \dfrac{k_1 A}{2d}$.

$C_2 = k_2 C_0 = k_2 \varepsilon_0 \dfrac{A/2}{d/2} \Rightarrow \quad C_2 = \varepsilon_0 \dfrac{k_2 A}{d}$.

$C_3 = k_3 C_0 = k_3 \varepsilon_0 \dfrac{A/2}{d/2} \Rightarrow \quad C_3 = \varepsilon_0 \dfrac{k_3 A}{d}$.

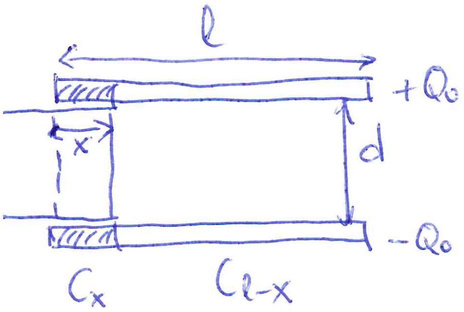
Άρα: $\dfrac{1}{C_{2+3}} = \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3} \Rightarrow C_{2+3} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} \left(\dfrac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} \right)$.

Και:

$$C_{o\lambda} = C_1 + C_{2+3} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} \right) \Rightarrow$$

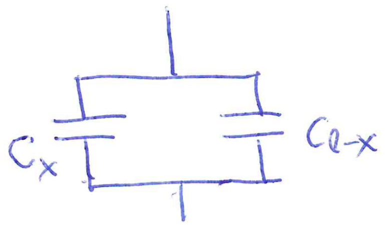
$$C_{o\lambda} = 1.8 \times 10^{-12} F = 1.8 pF.$$

4 Ένας πυκνωτής είναι κατασκευασμένος από δύο τετραγωνικές πλάκες πλευράς l που έχουν μεταξύ τους απόσταση d. Οι δύο οπλισμοί του φορτίζονται σε Q_0^+ και Q_0^- και διακόπτεται η τάση. Ένα διηλεκτρικό πλακίδιο σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς κ εισάγεται στο χώρο μεταξύ των οπλισμών κατά απόσταση x, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. (a) Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα της διάταξης. (b) Υπολογίστε την ενέργεια που αποθηκεύθηκε στον πυκνωτή αν η τάση είναι V. (c) Βρείτε την κατεύθυνση και το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο πλακίδιο (αγνοήστε την τριβή και την παραμόρφωση του πεδίου στα άκρα του πυκνωτή. (d) Υπολογίστε μία αριθμητική τιμή της δύναμης, αν $l = 5cm$, $V = 2000V$, $d = 2mm$ και το διηλεκτρικό είναι γυαλί ($\kappa = 4.5$).



ΛΥΣΗ

(a) Θεωρώ ότι το σύστημα αποτελείται από δύο πυκνωτές συνδεδεμένους παράλληλα.



Άρα: $C_{ολ} = C_x + C_{l-x} = \kappa C_{0x} + \varepsilon_0 \frac{l(l-x)}{d} \Rightarrow$

$$C_{ολ} = \kappa \varepsilon_0 \frac{lx}{d} + \varepsilon_0 \frac{l(l-x)}{d} \Rightarrow C_{ολ}(x) = \frac{\varepsilon_0}{d}\left(\kappa l x + l^2 - l x\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{C_{ολ}(x) = \frac{\varepsilon_0 l}{d}\left[l + x(\kappa - 1)\right]}.$$

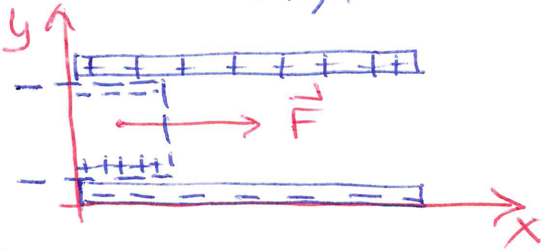
B) Ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή:

$$U(x) = \frac{Q_0^2}{2C_{ολ}} = \frac{Q_0^2 d}{2\varepsilon_0 l} \frac{1}{\left[l + x(\kappa-1)\right]}.$$

Όσο αυξάνεται το x, το $U(x)$ ελαττώνεται.

(c) Στο πλαισίδιο δεν ασκείται δύναμη με y-συνιστώσα.

Η συνολική δύναμη, κατά μήκος του άξονα των x "παράγει" ή "καταναλώνει" έργο ίσο με: $F\Delta x$ (όταν το πλαισίδιο μετακινηθεί κατά Δx).



Το έργο αυτό πρέπει να ίσο με $-\Delta U$ (το αντίστροφο της μεταβολής της U όταν το διηλεκτρικό μετακινηθεί κατά Δx).

Άρα: $$F\Delta x = -\Delta U \Rightarrow F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2}\left(\frac{\partial C_{o\lambda}^{-1}}{\partial x}\right) \Rightarrow$$

$$F = -\frac{Q^2}{2}\left(\frac{-1}{C_{o\lambda}^2}\right)\frac{\partial C_{o\lambda}}{\partial x} = \frac{Q^2}{2C_{o\lambda}^2}\,\frac{\varepsilon_0 l}{d}\,\frac{\partial[l + x(\kappa-1)]}{\partial x} \Rightarrow$$

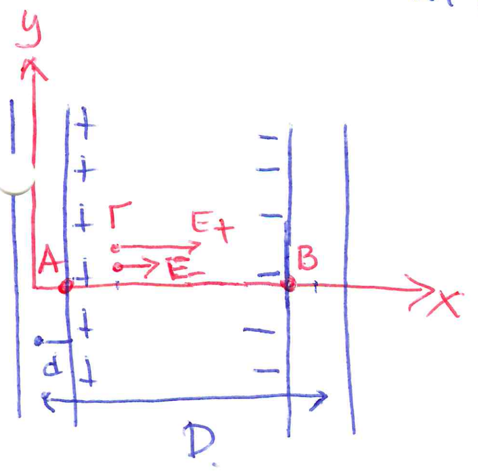
.... (οι φοιτητές πρέπει να μπορείτε να υπολογίσετε την παράγωγο)

$$F = \frac{Q^2}{2C_{o\lambda}^2}\,\frac{\varepsilon_0 l}{d}\,\underset{>0}{(\kappa-1)} \Rightarrow \vec{F} = \frac{Q_0^2\,\varepsilon_0 l}{2C_{o\lambda}^2\, d}(\kappa-1)\,\hat{i}.$$

$\boxed{5}$ Θεωρείστε ότι δύο παράλληλα σύρματα μεγάλου μήκους, φορτισμένα με αντίθετα φορτία, έχουν ακτίνα d και η μεταξύ των κέντρων τους απόσταση είναι D. Εάν υποτεθεί ότι το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια κάθε σύρματος, αποδείξτε ότι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του ζεύγους των συρμάτων δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}.$$

ΛΥΣΗ



Η χωρητικότητα του συστήματος είναι:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|},$$

όπου ΔV η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο συρμάτων, δηλ. μεταξύ δύο σημείων στα δύο σύρματα, έστω το A ⸗ B (δεν έχει σημασία ποια, αφού το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια κάθε σύρματος). Οπότε:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_d^{D-d} \vec{E}\cdot d\vec{r}.$$ Η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα A ⸗ B, άρα:

$$\Delta V = -\int_d^{D-d} (\vec{E}\cdot\hat{i})dx. \quad (1)$$

Σε κάθε σημείο μεταξύ των A ⸗ B: $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$, όπου $\vec{E}_-$ το $\vec{E}_+$ το πεδίο λόγω του θετικά φορτισμένου σύρματος και $\vec{E}_-$ το πεδίο λόγω του αρνητικά φορτισμένου σύρματος. Για το πεδίο κάθε ένα απ' αυτά, επειδή έχουν μεγάλο μήκος, το πεδίο σε απόσταση r θα είναι ίσο μ' αυτό μιας φορτισμένης ευθείας άπειρου μήκους ⸗ σταθερού λ. Άρα, π.χ., στο σημείο Γ, το ολικό πεδίο θα είναι:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{i} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (D-x)}\hat{i}$$

Οπότε:

$$\Delta V = -\int_d^{D-d}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (D-x)}dx\right] = -\int_d^{D-d}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx - \int_d^{D-d}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (D-x)}dx \Rightarrow$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\int_d^{D-d}\frac{dx}{x} + \int_d^{D-d}\frac{dx}{(D-x)}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln x\Big|_d^{D-d} - \ln(D-x)\Big|_d^{D-d}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{D-d}{d}\right) - \ln\left(\frac{d}{D-d}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{D-d}{d}\right) + \ln\left(\frac{D-d}{d}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D-d}{d}\right) \quad (2)$$

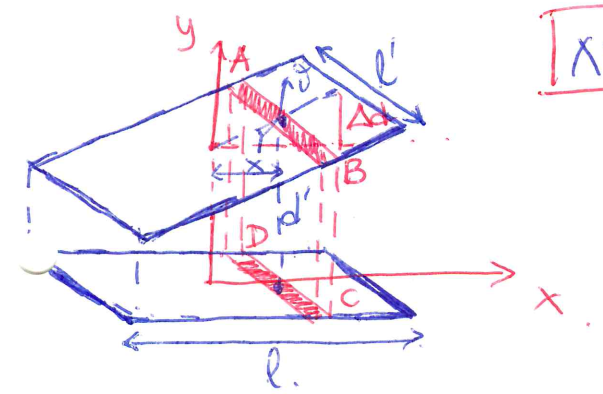
Λόγω της (2), η (1) γίνεται:

$$C = \frac{Q}{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}, \quad \text{όμως: } \lambda = \frac{Q}{\ell}, \text{ άρα:}$$

$$C = \frac{\cancel{Q}\,\pi\varepsilon_0}{\frac{\cancel{Q}}{\ell}\cdot\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{C}{\ell} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}}$$

6. Ένας επίπεδος πυκνωτής αέρα σχηματίζεται από δύο μη παράλληλες πλάκες, που η καθεμιά έχει εμβαδόν A. Η επάνω πλάκα είναι κεκλιμένη ως προς την κάτω, με αποτέλεσμα στη δεξιά πλευρά η απόσταση των άκρων των δύο πλακών να είναι $d+\Delta d$, ενώ στην αριστερή πλευρά $d-\Delta d$. Εάν υποτεθεί ότι $\Delta d \ll d$ και ότι η απόσταση d είναι μικρή σε σύγκριση με το μήκος των πλακών, αποδείξτε ότι:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2\right].$$



ΛΥΣΗ

Θεωρώ τον στοιχειώδη πυκνωτή ABCD. Γι' αυτόν τον πυκνωτή:

$$dC = \varepsilon_0 \frac{dA}{d'}, \quad \text{όπου } d' = d + \varepsilon\varphi(\theta)x,$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\Delta d}{l/2}, \quad \text{άρα:}$$

$$dC = \varepsilon_0 \frac{l'\,dx}{d\left(1+\frac{2\Delta d}{d}\frac{x}{l}\right)} \Rightarrow$$

$$C = \int dC = \frac{\varepsilon_0 l'}{d}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dx}{\left(1+\frac{2\Delta d}{d}\frac{x}{l}\right)} \overset{B=\frac{2\Delta d}{dl}}{=} \frac{\varepsilon_0 l'}{d}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dx}{1+Bx} \Rightarrow$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 l'}{d}\frac{1}{B}\ln(Bx+1)\Big|_{-l/2}^{l/2} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 \overbrace{l l'}^{A}}{d}\frac{1}{\frac{2\Delta d}{d}}\left[\ln\left(B\tfrac{l}{2}+1\right) - \ln\left(1-\tfrac{Bl}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\ldots \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{1}{\frac{2\Delta d}{d}}\ln\left(\frac{1+\Delta d/d}{1-\Delta d/2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \ldots, \quad \forall \text{ επειδή } \frac{\Delta d}{d} \ll 1,$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\cdot\frac{1}{\frac{2\Delta d}{d}}\cdot 2\left[\frac{\Delta d}{d} + \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^3\right] = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{1}{\cancel{\frac{2\Delta d}{d}}}\cancel{\frac{2\Delta d}{d}}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2\right]}$$