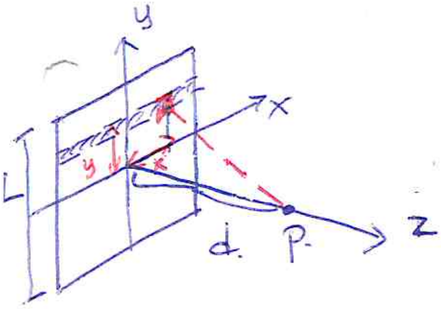
3ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

1 Ένα τετράγωνο φύλλο πλευράς L έχει σταθερή πυκνότητα φορτίου σ και βρίσκεται στο επίπεδο xy. Βρείτε τη μαθηματική σχέση η οποία περιέχει ολοκλήρωμα και είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού δυναμικού στο σημείο P που βρίσκεται στον κάθετο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του φύλλου. Υποθέστε ότι το σημείο P έχει απόσταση d από το φύλλο.

ΛΥΣΗ.



Σύμφωνα με τη θεωρία:

$$V_p = k_e \int \frac{dq}{r}, \quad \text{όπου } dq = \sigma \underbrace{dx\,dy}$$

οι διαστάσεις στοιχειώδους τμήματος (εμφανίζεται με το κόκκινο-τετράγωνο στο σχήμα).

το οποίο απέχει απόσταση: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $z=d$, άρα:

$r = \sqrt{x^2+y^2+d}$, από το σημείο P.

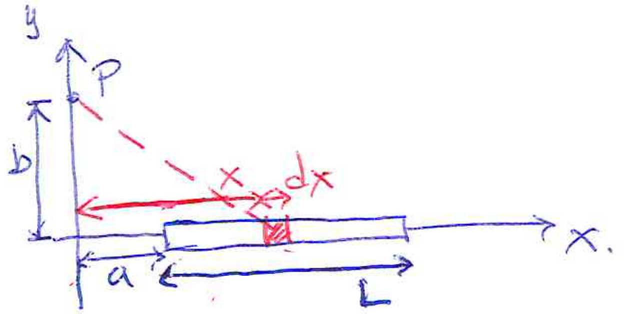
Υπολογίζουμε πρώτα το V_p λόγω συνεισφοράς όλων των στοιχειωδών φορτίων στη γραμμοσκιασμένη οριζόντια λωρίδα,

$$dV_p = k_e \sigma\, dy \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}}.$$

Οπότε, για να βρούμε το συνολικό δυναμικό στο P, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε για όλες τις λωρίδες από $-L/2$ έως $L/2$:

$$V_p = k_e \sigma \int_{-L/2}^{L/2} dy \left(\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} \right).$$

2 Μία λεπτή, ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος έχει μήκος L και γραμμική πυκνότητα φορτίου λ. Βρείτε μία έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P, το οποίο βρίσκεται πάνω στον θετικό άξονα y, σε απόσταση b από την αρχή των συντεταγμένων.



ΛΥΣΗ

Θεωρώ στοιχειώδες τμήμα της ράβδου, μήκους dx, & φορτίου $dq = \lambda dx$. Το δυναμικό λόγω dq στο P θα είναι:

$$dV(P) = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{(x^2 + b^2)}}$$

Άρα, το συνολικό δυναμικό μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας:

$$V(P) = k_e \int_a^{L+a} \frac{\lambda dx}{\sqrt{(x^2+b^2)}} = k_e \lambda \ln \left[\sqrt{x^2+b^2} + x \right] \Big|_a^{a+L} \Rightarrow$$

$$V(P) = k_e \lambda \ln \frac{\sqrt{(a+L)^2 + b^2} + a + L}{\sqrt{a^2+b^2} + a}$$

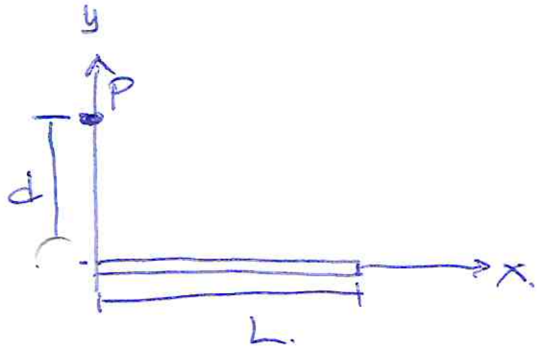
$$\left(\text{Ισχύει: } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \ln \left[\sqrt{x^2+b^2} + x \right] + c \right).$$

3 Το δυναμικό σ' ένα σημείο P που έχει απόσταση d πάνω από το ένα άκρο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου μήκους L, η οποία βρίσκεται κατά μήκος του άξονα x είναι:

$$V_d = \frac{kQ}{L} \ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}\right).$$

Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα για να υπολογίσετε τη συνιστώσα y του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P.

ΛΥΣΗ



Με βάση την εκφώνηση, το δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο του άξονα y, θα δίνεται από τη σχέση:

$$V(y) = \frac{kQ}{L} \ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+y^2}}{y}\right). \quad \text{Άρα:}$$

$$\vec{E}(y) = -\vec{\nabla} V(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}.$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{d}{dy}\left[\frac{kQ}{L} \ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+y^2}}{y}\right)\right] = -\frac{kQ}{L}\frac{d}{dy}\left[\ln\left(L+\sqrt{L^2+y^2}\right) - \ln(y)\right]$$

$= \dots$ (οι φοιτητές θα πρέπει να δείξουν τις ενδιάμεσες πράξεις)

$$= \frac{kQ}{L}\left[\frac{1}{y} - \frac{y}{\sqrt{y^2+L^2}\left(\sqrt{y^2+L^2}+L\right)}\right]. \quad \text{Άρα:}$$

$$\vec{E}(y) = \frac{kQ}{Ly}\left[1 - \frac{y^2}{y^2+L^2+L\sqrt{y^2+L^2}}\right]\hat{j}.$$

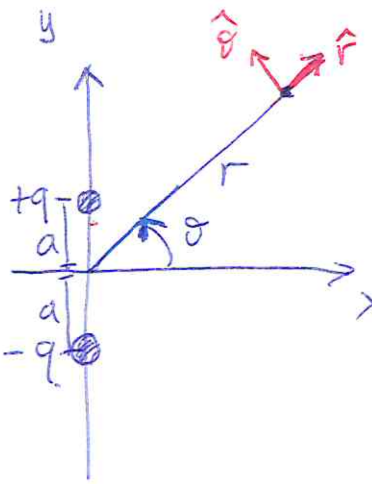
4 Ηλεκτρικό δίπολο κείται κατά μήκος του άξονα y.

(α) Στο σημείο P, που βρίσκεται μακριά από το δίπολο ($r \gg a$), το ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V(r,\theta) = k_e \frac{P\sin\theta}{r^2},$$ όπου $p = 2qa$. Υπολογίστε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E_r και E_θ. Αυτά τα αποτελέσματα δικαιολογούνται για $\theta = 90°$ και $\theta = 0°$; Για $r = \phi$;

(β) Σχετικά με το ίδιο δίπολο, εκφράστε το V ως συνάρτηση των ορθογώνιων συντεταγμένων. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που θα βρείτε, και παίρνοντας $r \gg a$, υπολογίστε τις συνιστώσες E_x και E_y του ηλεκτρικού πεδίου.

ΛΥΣΗ



(α) Στις πολικές συντεταγμένες, ισχύει:

$$\vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \right).$$

Άρα, αφού $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(\theta, r)$, θα έχουμε:

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}, \quad \text{και} \quad \vec{E}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}. \quad (1)$$

Αφού $V(r,\theta) = k_e \frac{P\sin\theta}{r^2}$, θα ισχύει:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k_e 2P\sin\theta}{r^3}, \quad \text{και:} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{k_e P\cos\theta}{r^3}.$$ Οπότε, η (1) γράφεται:

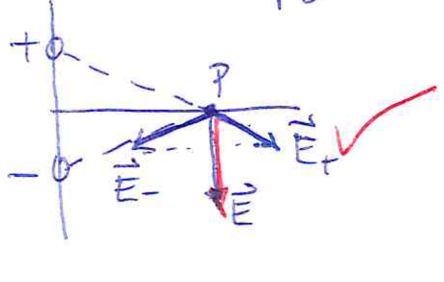
$$\vec{E}_r(r,\theta) = \frac{k_e 2P\sin\theta}{r^3}\hat{r}, \quad \vec{E}_\theta(r,\theta) = \frac{-k_e P\cos\theta}{r^3}\hat{\theta}.$$

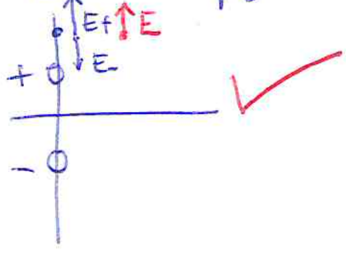
Εν γένει:

$$\vec{E} = \vec{E}_r(r,\theta) + \vec{E}_\theta(r,\theta) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E}(r,\theta) = \frac{k_e 2P\sin\theta}{r^3}\hat{r} - \frac{k_e P\cos\theta}{r^3}\hat{\theta}.}$$ Οπότε:

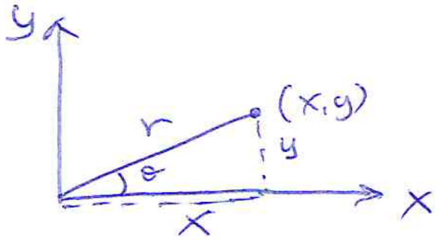
$$\vec{E}(\theta = \phi) = -\frac{k_e P}{r^3}\hat{\theta}, \qquad \vec{E}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k_e 2P}{r^3}\hat{r}.$$





$\vec{E}(r=\phi) = \infty$, λάθος, επειδή η σχέση που μας δίνει το δυναμικό είναι προσεγγιστική, & ισχύει μόνο όταν: $r \gg a$.

(b).



Η σχέση μεταξύ καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων είναι:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \text{και:} \quad r^2 = x^2+y^2.$$

Άρα το δυναμικό σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται:

$$V(x,y) = k_e \frac{P(y/r)}{x^2+y^2} \Rightarrow V(x,y) = k_e \frac{Py}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

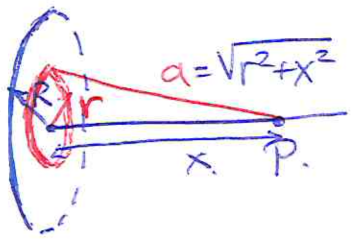
Επομένως: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}$.

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορούν να δείξουν):

$$E_x \left(= -\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{3 k_e p x y}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \quad E_y \left(= -\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{k_e P (2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

$\boxed{5}$ Ένας φορτισμένος δίσκος ακτίνας R έχει μεταβλητή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma(r) = Cr$, όπου C είναι μία σταθερά και η r μετριέται από το κέντρο του δίσκου. Βρείτε το δυναμικό σ' ένα σημείο P πάνω στον κάθετο άξονα συμμετρίας του δίσκου το οποίο έχει απόσταση x από τον δίσκο.

ΛΥΣΗ



Θεωρώ στοιχειώδη δακτύλιο ακτίνας r, πάχους dr. Το στοιχειώδες φορτίο του δακτυλίου είναι:

$$dq(r) = 2\pi r\,\sigma(r)\,dr = 2\pi r C r\,dr = 2\pi C r^2 dr.$$

Άρα, το συνολικό δυναμικό, $V(P)$, στο σημείο P, θα δίνεται:

$$V(P) = k_e \int_0^R \frac{2\pi C r^2 dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = 2\pi k_e C \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^2+x^2}} \Rightarrow$$

$$V(P) = 2\pi k_e C \left\{ \frac{R\sqrt{R^2+x^2}}{2} - \frac{x^2}{2} \ln\left(R + \sqrt{R^2+x^2}\right) + \frac{x^2}{2} \ln x \right\}$$

(Ισχύει: $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2+x^2} - a^2 \ln\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)\right] + C'$)

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορούν να εκτελέσουν τις πράξεις).

6. Ο απαριθμητής Geiger-Muller είναι ένας τύπος ανιχνευτή ακτινοβολίας που αποτελείται κυρίως από ένα κυλινδρικό μεταλλικό σωλήνα (κάθοδος) εσωτερικής ακτίνας r_a, που έχει στον άξονά του ένα κυλινδρικό σύρμα (άνοδος) ακτίνας r_b. Το φορτίο ανά μονάδα μήκους στην άνοδο είναι λ, ενώ το φορτίο ανά μονάδα μήκους στην κάθοδο είναι $-\lambda$. (a) Αποδείξτε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ του σύρματος και του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση:

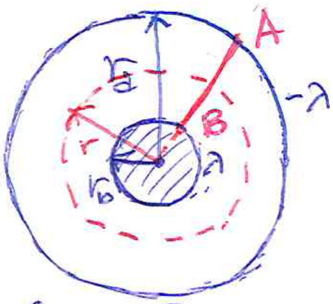
$$\Delta V = V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a) = 2k_e\lambda \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

(b). Αποδείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή αυτή είναι:

$$E = \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}\left(\frac{1}{r}\right),$$

όπου r είναι η απόσταση του σημείου στο οποίο μετριέται το πεδίο από το κέντρο της ανόδου.

ΛΥΣΗ



Θεωρώ κυλινδρική επιφάνεια, ακτίνας r και μήκους h. Λόγω συμμετρίας, περιμένω το πεδίο να είναι ακτινικό, με κατεύθυνση προς τα έξω. Εφαρμόζω νόμο του Gauss:

$$\oint_{S} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{εντός}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E\,2\pi r h = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}} \quad (1)$$

$S \rightarrow$ κυλινδρική επιφάνεια, $d\vec{A} \parallel \vec{E}$ ομόρροπα

Άρα, η διαφορά δυναμικού θα είναι:

$$\Delta V = V_B - V_A = V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_b}^{\vec{r}_a} \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{r}}_{ομόρροπα} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_b}^{r_a}\frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_{r_b}^{r_a} \Longrightarrow \boxed{\Delta V = 2k_e\lambda\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \quad (2).$$

(b). Από την (2) θα έχουμε: $2k_e\lambda = \dfrac{\Delta V}{\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}$ (3). Λόγω της (3), η (1) γράφεται:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}\cdot\frac{1}{r}\hat{r}}$$