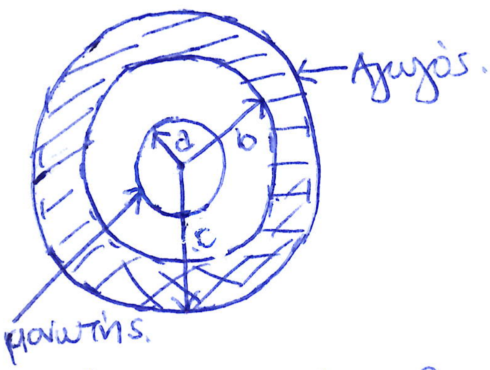
2^{o} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1 Αναφερόμενοι στη διάταξη που δείχνει το παρακάτω σχήμα, υποθέστε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο 10 cm από το κέντρο μετρήθηκε και είναι ίσο με 3.6×10^{3} N/C ακτινικά προς τα μέσα, ενώ το ηλεκτρικό πεδίο σ' ένα σημείο 50 cm από κέντρο ίσο με 2×10^{2} N/C ακτινικά προς τα έξω. Από τα δεδομένα αυτά βρείτε (α) το φορτίο στη μονωτική σφαίρα, (β) το συνολικό φορτίο στην κοίλη αγώγιμη σφαίρα, και (γ) τα ολικά φορτία στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια της κοίλης αγώγιμης σφαίρας. ($a=5$cm, $b=20$cm, $c=25$cm).

ΛΥΣΗ



Νόμος του Gauss: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{εντός}}{\varepsilon_0}$,

$\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\ N^{-1}m^{-2}C^{2}$.

α) $a<r<b$. Θεωρώ σφαίρα με ακτίνα r, για την οποία:

$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = E4\pi r^2$ (πρέπει να δώσετε εξηγήσεις για το πως καταλήγουμε σ' αυτή τη σχέση).

Αφού το πεδίο σε απόσταση $r=10$ cm είναι "προς τα μέσα":

$Q_{μον.} = -|E|4\pi r^2\varepsilon_0 \Rightarrow Q_{μον} = -4\times10^{-9}\,C$.

β) $r>c$. Όπως ς πριν, με εφαρμογή Νόμου του Gauss:

$E4\pi r^2 = \frac{Q_{ολ}}{\varepsilon_0}$, $Q_{ολ} = Q_{μον}+Q_{αγ}$. $Q_{αγ}>0$ και $Q_{αγ}>Q_{μον}$. Για $r=50$ cm, αφού το πεδίο είναι ακτινικό, προς τα έξω.

$Q_{ολ} = 2\times10^{2}(N/C)4\pi(0.5)^2\varepsilon_0 \Rightarrow Q_{ολ} = 5.6\times10^{-9}\,C$, Άρα: $Q_{αγ} = 9.6\times10^{-9}\,C$.

γ) $b<r<c$, $E=0$ (αγωγός), άρα: $Q_b = -Q_{μον}$ (ώστε $Q_{εντός}=0$), άρα $Q_b = 4\times10^{-9}\,C$. Οπότε: $Q_c+Q_b=Q_{αγ} \Rightarrow$
$Q_c = Q_{αγ}-Q_c = 5.6\times10^{-9}\,C$.

2 Μία συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας a έχει σταθερή πυκνότητα φορτίου ρ και ολικό φορτίο Q. Τη σφαίρα περιβάλλει μία ομόκεντρη, αφόρτιστη, αγώγιμη, κοίλη σφαιρική επιφάνεια εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας b και c, αντίστοιχα (όπως στο σχήμα της 1ης άσκησης). a) Βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στις περιοχές $r<a$, $a<r<b$, $b<r<c$, και $r>c$. b) Προσδιορίστε το εξ' επαγωγής φορτίο που δημιουργείται ανά μονάδα επιφάνειας στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια της κοίλης σφαίρας.

ΛΥΣΗ

Νόμος του Gauss: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \dfrac{q_{εντός}}{\varepsilon_0}$.

a)

1). $r<a$, $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,4\pi r^2 = \dfrac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$\vec{E}(\vec{r}) = \rho\dfrac{\cancel{4\pi} r^{\cancel{3}}}{3\varepsilon_0 \cancel{4\pi r^2}}\hat{r}$, $\left(\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\right)$, άρα:

$\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi a^3}\cdot\dfrac{r}{\cancel{3}\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{Q r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{r}}$.

2). $a<r<b$, $q_{εντός} = Q$, άρα: $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$.

3) $b<r<c$, $q_{εντός} = \phi$, άρα $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \phi}$.

(λόγω δημιουργίας φορτίου, εξ επαγωγής, στην εσωτερική επιφάνεια ίσου με $-Q$, της κοίλης αγώγιμης επιφάνειας).

4). $r>c$, $q_{εντός} = Q$, άρα: $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$

b). $\sigma_b = \dfrac{Q_b}{4\pi b^2} = -\dfrac{Q}{4\pi b^2}$.

$\sigma_c = \dfrac{Q_c}{4\pi c^2} = +\dfrac{Q}{4\pi c^2}$.

$\boxed{3}$ Έστω μονωτική συμπαγής σφαίρα ακτίνας R, για την οποία: $\rho(r) = Ar^2$ (ρ είναι η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου), όπου A είναι σταθερά και $r<R$ μετράται από το κέντρο της σφαίρας. Αποδείξτε ότι: α) $E = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0 r^2}$ $(r>R)$,

β) $E = \frac{Ar^3}{5\varepsilon_0}$, $r<R$.

$\boxed{\text{ΛΥΣΗ}}$

Για $r<R$, $\rho(r) = Ar^2 \Rightarrow Q(r) = \int_0^r Ar^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{} \Rightarrow$

στοιχειώδες dV για σφαιρικό φλοιό ακτίνας r και πάχους dr

$Q(r) = 4\pi A \int_0^r r^4 dr \Rightarrow$

$Q(r) = 4\pi A \frac{r^5}{5}$ (1).

$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \underbrace{\int E\, dA}_{} = \frac{Q_{εντός}}{\varepsilon_0}$ (2).

σφαιρική επιφάνεια, ακτίνας r, με το r να μετράται από το κέντρο της σφαίρας

επειδή το πεδίο ακτινικό, και $\vec{E} /\!/ d\vec{A}$ (λόγω συμμετρίας).

β). $E\int dA = 4\pi A \cdot \frac{r^5}{5\varepsilon_0} \Rightarrow E\, \cancel{4\pi r^2} = \cancel{4\pi} A \frac{r^{\cancel{5}}}{5\varepsilon_0} \Rightarrow$

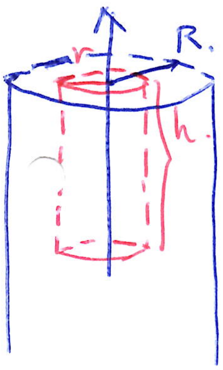
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Ar^3}{5\varepsilon_0}\hat{r}$.

α). $E(r) = \frac{Q_{ολ}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$ (από (1): $Q_{ολ} = \frac{4\pi A R^5}{5}$) $\Rightarrow$

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$.

4. Ένας μονωτικός κύλινδρος άπειρου μήκους και ακτίνας R έχει χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου που μεταβάλλεται με την ακτίνα σύμφωνα με τη σχέση: $\rho(r) = \rho_0\left(a - \frac{r}{b}\right)$, όπου ρ_0, a, b είναι θετικές σταθερές και r είναι η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου. Χρησιμοποιήστε το νόμο του Gauss για να προσδιορίσετε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου όταν (1) $r<R$ και (2): $r>R$.

ΛΥΣΗ



Θεωρώ κυλινδρική επιφάνεια Gauss, μέσα στον κύλινδρο, ακτίνας r και μήκους h.

(1) $r<R$: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ (1).

Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέρος της παραπάνω σχέσης υπολογίζεται στην κυλινδρική επιφάνεια:

$$\oint \vec{E}\,d\vec{A} = E\int dA = E\,2\pi r h \quad (2).$$

Λόγω συμμετρίας: $\vec{E}$ κάθετο στον άξονα κυλίνδρου & κατευθύνεται προς τα έξω.

Εξετάζω μόνο την κυρτή επιφάνεια. Η ροή είναι μηδενική στην πάνω + κάτω επιφάνεια του κυλίνδρου.

Για το δεύτερο μέρος της σχέσης (1): $\frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\text{όγκος}\cdot\rho}{\varepsilon_0} = \int_0^r \frac{2\pi r\,dr\,h\,\rho(r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = 2\pi h\rho_0 \int_0^r \frac{r\left(a-\frac{r}{b}\right)}{\varepsilon_0}\,dr \Rightarrow \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi\rho_0 h}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{r^2 a}{2} - \frac{r^3}{3b}\right). \quad (3)$$

(1) Λόγω των (2) & (3), η (1) γράφεται:

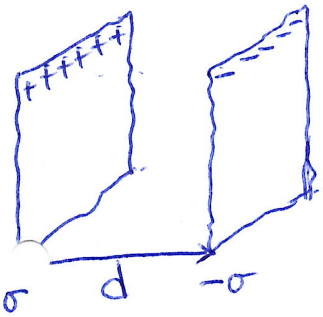
$$E\,\cancel{2\pi r h} = \cancel{2\pi}\rho_0\cancel{h}\,\frac{1}{\varepsilon_0}\left(a\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3b}\right) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2} - \frac{r}{3b}\right)}$$

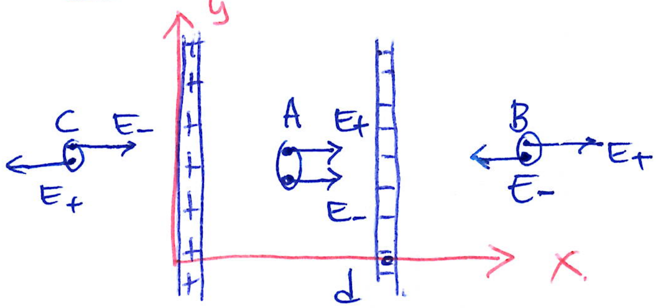
(2). Όταν $r>R$, $q_{in} = 2\pi\rho_0 h\left(\frac{R^2 a}{2} - \frac{R^3}{3b}\right)$. Οπότε:

$$E\,\cancel{2\pi} r \cancel{h} = \cancel{2\pi}\rho_0\cancel{h}\,\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b}\right) \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho_0 R^2}{r\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2} - \frac{R}{3b}\right)}$$

5 Δύο φορτισμένα μονωτικά φύλλα απείρων διαστάσεων είναι παράλληλα μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το αριστερό φύλλο έχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $+\sigma$ και το δεξιό φύλλο $-\sigma$. Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημεία που βρίσκονται (a) αριστερά των δύο φύλλων, (b) στη μεταξύ τους περιοχή, και c) δεξιά από αυτά.

ΛΥΣΗ





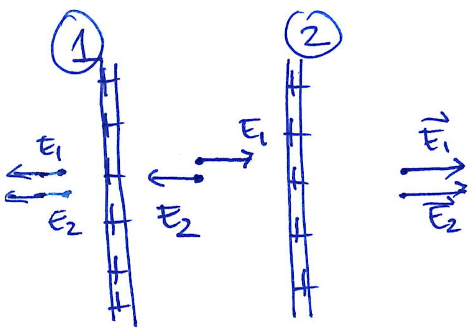
Έστω d η απόσταση μεταξύ των δύο φύλλων. Το πεδίο, για κάθε ένα από τα δύο φύλλα σε οποιοδήποτε σημείο εκτός του επιπέδου έχει μέτρο $\sigma/2\varepsilon_0$, κι είναι κάθετο σ' αυτό. Το πεδίο του κάθε φύλλου, σε διάφορα σημεία, είναι σχεδιασμένο στο παραπάνω σχήμα. Επομένως:

$$\vec{E}_{ολ} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \hat{i}\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad , \; 0<x<d \quad \text{(πεδίο "ανάμεσα").}$$

$$\vec{E}_{ολ} = 0 \qquad (x>d,\; x<\phi). \quad \text{(πεδίο δεξιά κι αριστερά των δύο φύλλων)}$$

6 Επαναλάβετε τους υπολογισμούς του παραπάνω προβλήματος, όταν κι τα δύο φύλλα έχουν σταθερή θετική πυκνότητα φορτίου ίση με σ.

ΛΥΣΗ



Έτσι, με βάση την ίδια λογική:

$$\vec{E}_{ολ} = \phi \qquad (0<x<d).$$

$$\vec{E}_{ολ} = \hat{i}\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (x>d).$$

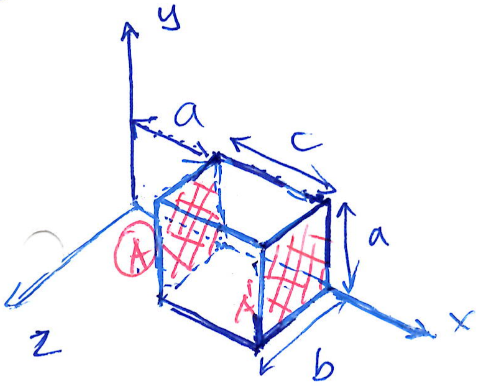
$$\vec{E}_{ολ} = -\hat{i}\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (x<\phi).$$

7. Μία κλειστή επιφάνεια διαστάσεων $a=b=0.4m$, και $c=0.6m$ είναι τοποθετημένη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή είναι ανομοιογενές και δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{E}=(3+2x^2)\hat{i}\ N/C,$$ όπου το x μετράται σε μέτρα.

Υπολογίστε την ολική ηλεκτρική ροή που εξέρχεται από την επιφάνεια. Ποιο είναι το καθαρό φορτίο που εγκλωβίζεται από την επιφάνεια;

ΛΥΣΗ



$$\underbrace{\vec{E}=(3+2x^2)\hat{i}\ \frac{N}{C}}_{\text{πεδίο ανομοιογενές}}.$$

συνολική ηλεκτρική ροή $\equiv \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{A}$

C είναι η κλειστή επιφάνεια.

Επειδή, εξ' ορισμού, $d\vec{A}$ κάθετο στις πλευρές της επιφάνειας, και $\vec{E}\parallel\hat{i}$, $\Phi_E=0$ για όλες τις επιφάνειες, εκτός από τις γραμμοσκιασμένες επιφάνειες. Έστω A η επιφάνεια σε απόσταση a από την αρχή των αξόνων, & A' η δεύτερη επιφάνεια (σε απόσταση $a+c$).

Επειδή $\vec{E}\parallel\hat{i}$ & $d\vec{A}\parallel\hat{i}$, για την επιφάνεια A

$$\Phi_{E,A}=\int_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \underbrace{-E\int dA}_{(\vec{E}\ \&\ d\vec{A}\ \text{αντίρροπα})} = -(3+2a^2)ab$$ (ab το εμβαδόν των $A+A'$).

και: $\Phi_{E,A'} = E\int dA = [3+2(a+c)^2]ab$. Άρα, συνολική ροή:

$$\Phi_C = \Phi_{E,A}+\Phi_{E,A'} = \{[3+2(a+c)^2]-3-2a^2\}ab \Rightarrow$$

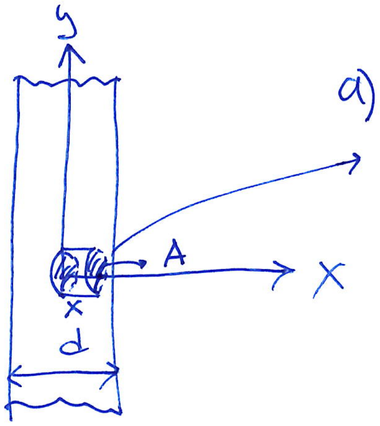
$$\Phi_C = 2cab(c+2a)\ \frac{Nm^2}{C}.$$ Και:

αφού δεν είναι μηδέν, το καθαρό φορτίο που εγκλωβίζεται από την επιφάνεια:

$$\boxed{q_c = \varepsilon_0\cdot 2cab(c+2a)\ C}.$$

$\boxed{8}$ Μία μονωτική πλάκα της οποίας οι δύο διαστάσεις έχουν άπειρο μήκος σε σχέση με την τρίτη έχει σταθερή θετική πυκνότητα φορτίου ρ. a) Αποδείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση x από το κέντρο της, και μέσα στην πλάκα, είναι: $E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$. b) Υποθέστε ότι ένα ηλεκτρόνιο φορτίου e^- και μάζας m τοποθετείται μέσα στην πλάκα. Αν αφεθεί ελεύθερο, ενώ ηρεμούσε σε απόσταση x από το κέντρο, αποδείξτε ότι θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση με συχνότητα ίση με: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho e}{m\varepsilon_0}}$.

$\boxed{\text{ΛΥΣΗ}}$



a) Θεωρώ κύλινδρο, μήκους x, εμβαδόν βάσης A, μέσα στην πλάκα. Λόγω συμμετρίας, το πεδίο θα είναι κάθετο στο επίπεδο yz (το επίπεδο της πλάκας). Άρα, η ηλεκτρική ροή στην κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου θα είναι μηδέν ($\vec{E} \perp d\vec{A}$), καθώς κ' στην επιφάνεια στο $x=0$ ($\vec{E}=0$). Άρα:

$$\oint_{\text{κύλινδρο}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\int_A dA = EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cancel{A} = \frac{\rho(x\cancel{A})}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{i}.$$

b). Δύναμη στο ηλεκτρόνιο: $\vec{F} = -e\vec{E} = -e\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{i}$. Άρα:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\rho e}{\varepsilon_0}x \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho e}{\varepsilon_0}x = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho e}{m\varepsilon_0}x = 0}_{\text{η εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή,}}.$$

$$\omega^2 = \frac{\rho e}{m\varepsilon_0} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho e}{m\varepsilon_0}}.$$