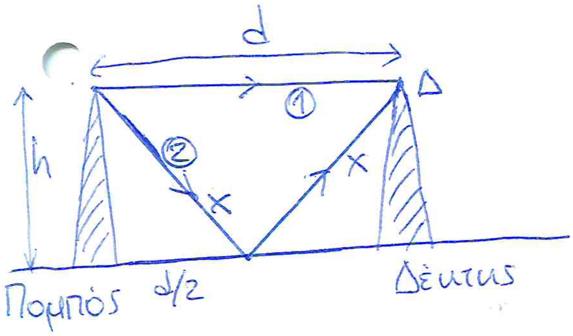
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 03.

1. Στην εικόνα φαίνονται ένας πομπός & ένας δέκτης ραδιοκυμάτων, οι οποίοι χωρίζονται από απόσταση d και βρίσκονται σε ύψος h από το έδαφος. Ο δέκτης μπορεί να λαμβάνει τα σήματα απευθείας από τον πομπό ή μέσω ανάκλασης στο έδαφος. Υποθέστε ότι το έδαφος ανάμεσα στον πομπό & στο δέκτη είναι επίπεδο & ότι κατά την ανάκλαση παρατηρείται αλλαγή φάσης 180°. Βρείτε ποια είναι τα μεγαλύτερα μήκη κύματος που συμβάλλουν α) ενισχυτικά και β) καταστρεπτικά.

ΛΥΣΗ



Οι ακτίνες 1 & 2 εκπέμπονται με την ίδια φάση, αλλά όταν φτάνουν στο δέκτη έχουν διαφορά φάσης, έστω $\varphi_{ολ}$, τόσο λόγω ανάκλασης της ακτίνας 2 στο έδαφος (κατά π) όσο & λόγω διαφοράς στον οπτικό δρόμο των δύο ακτίνων, $\varphi_{\Delta L}$. Η διαφορά στον οπτικό δρόμο των δύο ακτίνων είναι:

$$\Delta L = 2x - d = 2\sqrt{h^2 + (d/2)^2} - d = \sqrt{4h^2 + d^2} - d \quad (1).$$

Ισχύουν: $\varphi_{ολ} = \pi + \varphi_{\Delta L}$, όπου $\varphi_{\Delta L} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L$. Οπότε:

α). Ενισχυτική συμβολή θα έχουμε όταν: $\varphi_{ολ} = 2\pi m$, $m = 1, 2, \ldots$, άρα:

$$\pi + \varphi_{\Delta L} = 2\pi m \Rightarrow \varphi_{\Delta L} = 2\pi(m - 1/2) \Rightarrow \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}\Delta L = \cancel{2\pi}(m - 1/2) \Rightarrow \lambda_{ενισχ} = \frac{\Delta L}{(m - 1/2)}, \; m = 1, 2, \ldots$$

Το μεγαλύτερο μήκος κύματος που συμβάλει ενισχυτικά θα είναι αυτό για $m = 1$, άρα: $\lambda_{max,ενισχ} = 2\Delta L \Rightarrow$

$$\lambda_{max,ενισχ.} = 2\left[\sqrt{4h^2 + d^2} - d\right].$$

β). καταστρεπτική συμβολή έχουμε όταν: $\varphi_{ολ} = 2\pi(m + 1/2)$, $m = 1, 2, \ldots$, άρα

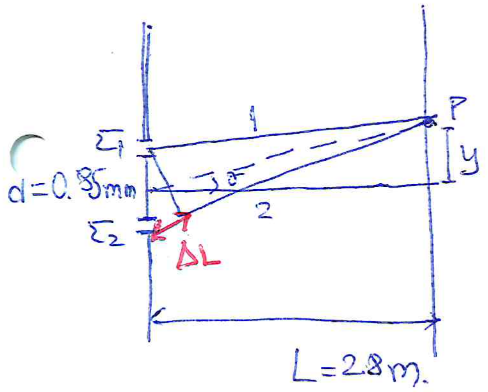
$$\pi + \varphi_{\Delta L} = 2\pi(m + 1/2) \Rightarrow \varphi_{\Delta L} = 2\pi m \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = 2\pi m \Rightarrow \lambda_{κατ} = \frac{\Delta L}{m}, \; m = 1, 2, \ldots$$

Το μεγαλύτερο μήκος κύματος που συμβάλει καταστρεπτικά θα είναι αυτό για $m = 1$, άρα:

$$\lambda_{max,κατ.} = \Delta L \Rightarrow \lambda_{max,κατ} = \sqrt{4h^2 + d^2} - d.$$

2 Δύο στενές, παράλληλες σχισμές σε απόσταση 0.85 mm μεταξύ τους φωτίζονται από φως μήκους κύματος 600 nm. Η οθόνη απέχει 2.8 m από τις σχισμές. (α) Ποια είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυμάτων που συμβάλλουν επάνω στην οθόνη, σ' ένα σημείο που απέχει 2.5 mm από τον κεντρικό φωτεινό κροσσό; (β) Ποιος είναι ο λόγος της έντασης σ' αυτό το σημείο προς την ένταση στο κέντρο του φωτεινού κροσσού;

ΛΥΣΗ



(α) Η διαφορά δρόμου $\Delta L (= d\sin\theta)$ θα προκαλέσει διαφορά φάσης, φ, μεταξύ των δύο ακτινών που συμβάλλουν στο σημείο P.

Ισχύει: $\varphi = \frac{2\pi \Delta L}{\lambda} = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$, όπου: $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2+L^2}}$. Δεδομένου ότι $y \ll L$,

θα ισχύει: $\sin\theta \simeq \frac{y}{L}$, άρα:

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}\frac{y}{L} = \frac{2\pi\,(0.8\times10^{-3}\text{m})\,(0.0025\text{m})}{(600\times10^{-9}\text{m})\,(2.8\text{m})} = 7.95\,\text{rad} = 2\pi + 1.66\,\text{rad} \Rightarrow$$

$$\varphi = 95.1^\circ$$

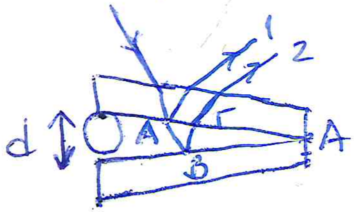
(β) Ισχύει: $I(\theta) = I_{max}\cos^2\left[\frac{\varphi(\theta)}{2}\right] \Rightarrow$

$$\frac{I(\theta)}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{95.1}{2}\right) \Rightarrow \frac{I(\theta)}{I_{max}} \simeq 0,46.$$

Απ' ότι φαίνεται, στο σημείο P οι ακτίνες συμβάλλουν εν μέρει ενισχυτικά, κ' η ένταση του φωτός είναι περίπου το μισό από την ένταση στο κέντρο του κροσσού.

3 Μεταξύ δύο γυάλινων πλακών οι οποίες διαχωρίζονται στο ένα άκρο τους από ένα πολύ λεπτό σύρμα με κυκλική διατομή, σχηματίζεται ένα τριγωνικό πρίσμα από αέρα. Φωτίζετε το πρίσμα από πάνω με φως των 600nm και καθώς το παρατηρείτε από ψηλά, βλέπετε 30 σκοτεινούς κροσσούς. Υπολογίστε τη διάμετρο d του σύρματος.

ΛΥΣΗ



Την πάνω επιφάνεια της πρώτης γυάλινης πλάκας θα τη βλέπουμε (σε ανακλάσεις) πάντα. Στην κάτω επιφάνεια της πρώτης πλάκας θα εμφανίζονται οι σκοτεινοί κροσσοί.

Φωτεινή ακτίνα που προσπίπτει στο Α στην κάτω επιφάνεια της πρώτης πλάκας ανακλάται, χωρίς διαφορά φάσης ($n_{αέρα} < n_{γυαλιού}$). Μέρος της ακτίνας διαθλάται και ανακλάται στην πάνω επιφάνεια της δεύτερης πλάκας (σημείο Β). Επιστρέφει ξανά στην πάνω πλάκα, & στο τέλος στο μάτι του παρατηρητή (ακτίνα 2). Στο σημείο Β η ακτίνα 2 εμφανίζει φάσης, π, λόγω ανάκλασης. Επίσης, η 2 έχει διαφορά φάσης με την 1 και επειδή θα πρέπει να διανύσει απόσταση $\simeq 2t$ (t το πάχος του πρίσματος στο σημείο της δεύτερης ανάκλασης). Άρα, για να έχουμε καταστρεπτική συμβολή, θα πρέπει:

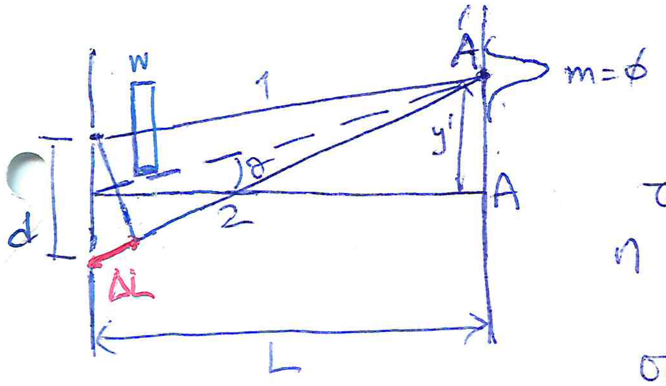
$$2t = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Το $m = 0$ αντιστοιχεί στο σημείο Α όπου ενώνονται οι δύο πλάκες. Υποθέτουμε ότι ο 30^{ος} σκοτεινός κροσσός αντιστοιχεί στο άλλο άκρο, στο οποίο υπάρχει το πολύ λεπτό σύρμα, & όπου $2d = 2t = 29\lambda \Rightarrow$

$d = 14.5\lambda \Rightarrow d = 14.5\,(600\times10^{-9}\,m) = 8.7\,\mu m$ (πολύ μικρότερο σε μέγεθος & από ανθρώπινη τρίχα).

4 Θεωρήστε τη διάταξη διπλής σχισμής που φαίνεται στην εικόνα, όπου η απόσταση των σχισμών είναι d κ η απόσταση της διάταξης από την οθόνη είναι L. Επάνω από την άνω σχισμή τοποθετείται ένα έλασμα από διαφανές πλαστικό με δείκτη διάθλασης n και πάχος w. Το αποτέλεσμα είναι ότι το κεντρικό μέγιστο της εικόνας συμβολής μετατοπίζεται προς τα πάνω κατά απόσταση y'. Βρείτε την απόσταση y'.

ΛΥΣΗ



Η ύπαρξη του ελάσματος αλλάζει, κατά κάποιο τρόπο, το μήκος της διαδρομής που θα διανύσει η οπτική ακτίνα καθώς διαδίδεται μέσα απ' αυτό. Οπότε το σημείο στο οποίο οι ακτίνες 1 και 2 θα συμβάλλουν ενισχυτικά (για $m=\phi$) δεν θα είναι πια το σημείο A, αλλά το A', για το οποίο η διαφορά διαδρομής για την ακτίνα 2, έστω ΔL, προκαλεί διαφορά φάσης, φ_2, ίδια μ' αυτή που προκαλεί η διέλευση της 1 μέσω του πλαστικού ελάσματος. Ισχύει: $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L$ (1)

Για το φ_1, ισχύει: $\Delta t_{αέρα} = \frac{w}{c}$ και $\Delta t_{πλ} = \frac{w}{\upsilon}$, άρα:

$$\Delta t_{πλ} - \Delta t_{αέρα} = w\left(\frac{1}{\upsilon} - \frac{1}{c}\right).$$ Όμως, $\upsilon = \frac{c}{n}$, άρα:

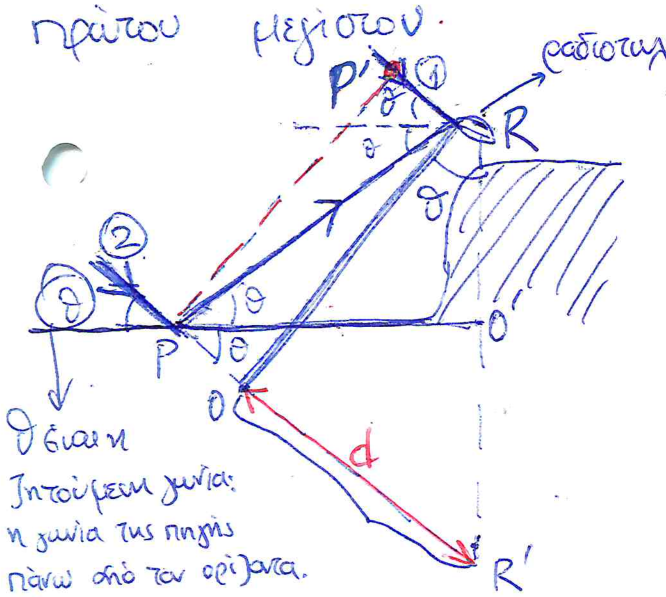
$$\Delta t_{πλ} - \Delta t_{αέρα} = w\left(\frac{n}{c} - \frac{1}{c}\right) = \frac{w}{c}(n-1) = \frac{w}{f\lambda}(n-1).$$ Για την ακτίνα 1, η διαφορά φάσης προκαλείται από το γεγονός ότι: $\Delta t_{αέρα} \neq \Delta t_{πλ}$. Η φ_1, θα είναι ανάλογη του ποσοστού της $(\Delta t_{πλ} - \Delta t_{αέρα})$ ως προς την περίοδο $T = \frac{1}{f}$, της ακτινοβολίας. Άρα $\varphi_1 = 2\pi \frac{\Delta t_{πλ} - \Delta t_{αέρα}}{T} = 2\pi \cancel{f} \cdot \frac{w}{\cancel{f}\lambda}(n-1) \Rightarrow$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi w}{\lambda}(n-1) \quad (2).$$

Από (1) κ (2), η σχέση: $\varphi_1 = \varphi_2$, γράφεται:

$\frac{2\pi w}{\lambda}(n-1) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L \Rightarrow \Delta L = w(n-1)$. Θεωρώντας ότι: $\Delta L \simeq d\sin\theta$, και $\sin\theta = \frac{y'}{L}$, έχουμε: $d\frac{y'}{L} = w(n-1) \Rightarrow \boxed{y' = \frac{w(n-1)L}{d}}$

5 Ραδιοκύματα συχνότητας 60 MHz που εκπέμπει κάποιος γαλαξίας φτάνουν σ' ένα ραδιοτηλεσκόπιο μέσω δύο διαφορετικών διαδρομών. Η πρώτη είναι μία απ' ευθείας διαδρομή προς το δέκτη, ο οποίος βρίσκεται στην άκρη ενός ψηλού γκρεμού δίπλα στον ωκεανό, ενώ η δεύτερη είναι μία διαδρομή μέσω ανάκλασης των ραδιοκυμάτων στο νερό. Αν το κάτοπτρο λήψης βρίσκεται σε ύψος 20 m από το επίπεδο της θάλασσας, ποια είναι η γωνία της ραδιοπηγής πάνω από τον ορίζοντα στη θέση του πρώτου μεγίστου.



ΛΥΣΗ

Έστω ακτίνα 1 που προσπίπτει απ' ευθείας στο δέκτη, και ακτίνα 2 που προσπίπτει εξ' ανακλάσεως στο σημείο R. Οι ακτίνες ακολουθούν διαφορετική διαδρομή για να φτάσουν στο R. Σύμφωνα με τον νόμο της ανάκλασης, η γωνία $R\hat{P}O'$ είναι ίση με θ, όπως βέβαια κ' η $R'\hat{P}O'$. Άρα το τρίγωνο PRR' είναι ισοσκελές, και άρα PR = PR'. Η διαφορά το μήκος της διαδρομής των ακτίνων (1) κ' (2) είναι ίση με: $\Delta L = PR - P'R = PR' - P'R = d$ (στο σχήμα), και: $d = \sin\theta(2\times O'R)$

Αυτή η διαφορά στον οπτικό δρόμο θα προκαλέσει διαφορά φάσης: $\varphi_{\Delta L} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta L$. Υπάρχει ήδη μία διαφορά φάσης ανάμεσα στις ακτίνες (1) κ' (2) λόγω ανάκλασης στο P. Άρα(*), για να έχουμε την πρώτη ενισχυτική συμβολή, θα πρέπει: $\varphi_{\Delta L} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \pi$.

Άρα: $\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \pi \Rightarrow 2d = \lambda \Rightarrow 2(2O'R)\sin\theta = \lambda$. (Για $f = 60$ MHz $\lambda = 5$ m). Άρα: $4\times 20\,\text{m}\,\sin\theta = 5\,\text{m} \Rightarrow \sin\theta = \frac{5}{80} \Rightarrow$

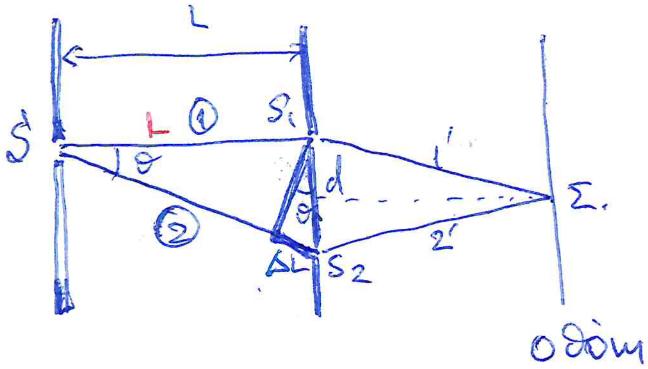
$$\boxed{\theta = 3{,}58^\circ}$$

* $\varphi_{ολ} = \varphi_{\Delta L} + \pi$.

$\varphi_{ολ} = 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L + \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \pi$

6 Από μία πολύ στενή σχισμή S διέρχεται μονοχρωματικό φως με μήκος κύματος 620 nm, που στη συνέχεια προσπίπτει σε μία οθόνη στην οποία υπάρχουν οι δύο παράλληλες σχισμές S_1 και S_2 που φαίνονται στην εικόνα. Η σχισμή S_1 είναι ευθυγραμμισμένη με την S και βρίσκεται σε απόσταση $L = 1.2\,m$ από αυτή, ενώ η S_2 είναι μετατοπισμένη κατά απόσταση d προς τα κάτω. Το φως ανιχνεύεται στο σημείο Σ επάνω σε μία δεύτερη οθόνη η οποία ισαπέχει από τις S_1 και S_2. Όταν είναι ανοιχτή είτε η S_1 είτε η S_2, στο σημείο Σ καταγράφονται ίσες εντάσεις φωτός. Όταν είναι ανοιχτές και οι δύο σχισμές, η ένταση είναι τριπλάσια. Βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή για την απόσταση d μεταξύ των σχισμών.

ΛΥΣΗ



Όταν οι ακτίνες 1 και 2 ξεκινάνε από την σχισμή S είναι ισοφασικές (σύμφωνες). Όμως, φτάνουν στα S_1 και S_2 με διαφορά φάσης, λόγω διαφοράς στο μήκος της διαδρομής που ακολουθούν:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L$$

Η διαφορά μήκους, ΔL, είναι ίση με: $\Delta L = (L^2 + d^2)^{1/2} - L$.

Λόγω της διαφοράς φάσης, για τα κύματα που εκπέμπονται από τα S_1 και S_2 ισχύει:

$E_1 = E_0 \sin\omega t$, και $E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Η (μέση) ένταση στο σημείο Σ είναι ανάλογη του $\langle E^2 \rangle$. Άρα, όταν είναι ανοιχτή είτε η S_1 είτε η S_2, στο σημείο Σ θα καταγράφεται ένταση φωτός $\propto \frac{E_0^2}{2}$.

Όταν είναι ανοιχτές και οι δύο σχισμές, το μήκος της διαδρομής των ακτίνων 1' και 2' από τα S_1 και S_2 στο Σ είναι το ίδιο, άρα, δεν προστίθεται σ' αυτά επιπλέον φάση. Οπότε:

$$E_\Sigma = E_1 + E_2 = E_0[\sin\omega t + \sin(\omega t + \varphi)] \Rightarrow$$

$$E_\Sigma = 2E_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin(\omega t + \varphi/2).$$

Τώρα, $I_\Sigma \propto \langle E_\Sigma \rangle^2$, και:

$$\langle E_\Sigma \rangle^2 = 4 E_0^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \langle \sin^2\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \rangle$$, όπου I_Σ

είναι η ένταση ακτινοβολίας στο Σ. Επειδή $\langle \sin^2(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \rangle = \frac{1}{2}$,

θα έχουμε: $\langle E_\Sigma \rangle^2 = 2 E_0^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Άρα:

$I_{\Sigma,S_1} = \frac{E_0^2/2}{c\mu_0}$, $I_{\Sigma,S_2} = \frac{E_0^2/2}{c\mu_0}$, και $I_{\Sigma,S_1+S_2} = \frac{2E_0^2\cos^2(\varphi/2)}{c\mu_0}$,

και: $\frac{I_{\Sigma,S_1+S_2}}{I_{\Sigma,S_1}} = \frac{I_{\Sigma,S_1+S_2}}{I_{\Sigma,S_2}} = 3$ (αυτό είναι δεδομένο της άσκησης).

Άρα:

$$\frac{2\cancel{E_0^2}\cos^2(\varphi/2)/\cancel{c\mu_0}}{\cancel{E_0^2}/(2\cancel{c\mu_0})} = 3 \Rightarrow 4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 3 \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{3/4} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{6}$$ και, $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L$, άρα:

$$\frac{\lambda}{6} = (L^2+d^2)^{1/2} - L \Rightarrow d = 0.498\ mm.$$

($\lambda = 620nm$, $L = 1.2m$)