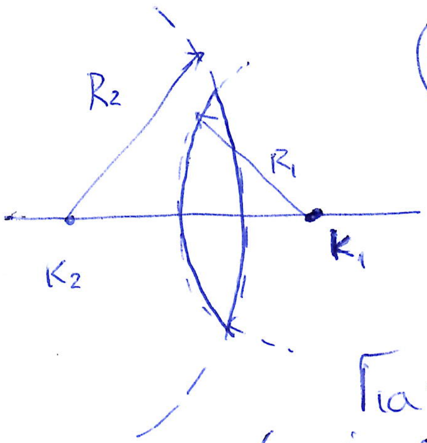
Ασκήσεις Κεφ. 02

1 Η αριστερή και η δεξιά επιφάνεια ενός αμφίκυρτου φακού έχουν ακτίνες καμπυλότητας 12 cm και 18 cm, αντίστοιχα. Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι 1.44. α) Υπολογίστε την εστιακή απόσταση του φακού για το φως που προσπίπτει από τα αριστερά. β) Κι αν...; Υποθέστε ότι περιστρέφετε τον φακό για να αντιμεταθέσετε τις ακτίνες καμπυλότητας των δύο πλευρών του· υπολογίστε την εστιακή απόσταση του φακού για το φως που προσπίπτει από τα αριστερά.

ΛΥΣΗ



(α) Ο φακός είναι αμφίκυρτος, με $R_1 = 12cm$ κ $R_2 = 18\,cm$. Είναι ένας φακός πιο παχύς στο κέντρο απ' ότι στα άκρα, άρα είναι συγκλίνοντας φακός, κ άρα η εστιακή του απόσταση είναι θετικός αριθμός.

Για το φως που προσπίπτει από τ' αριστερά, $R_1 = 12cm$ (κυρτή επιφάνεια) κ $R_2 = -18cm$ (κοίλη επιφάνεια). Άρα από την εξίσωση κατασκευαστών φακών:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.44-1)\left(\frac{1}{12\,cm} - \frac{1}{(-18cm)}\right) \Rightarrow f = 16.4\,cm$$

β). Στρέφουμε το φακό, οπότε αντιμεταθέτουμε τις ακτίνες καμπυλότητας. Ωστόσο, ο φακός παραμένει συγκλίνοντας, άρα το f θα πρέπει να είναι πάλι θετικό, κ μάλιστα το ίδιο με πριν (αν ισχύει η προσέγγιση του λεπτού φακού). Οπότε:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.44-1)\left(\frac{1}{18cm} - \frac{1}{(-12cm)}\right) \Rightarrow f = 16.4cm.$$

Άρα, στρέφοντας το φακό δεν επηρεάζει την πορεία των ακτίνων (αρκεί ο φακός να είναι λεπτός). Το γεγονός ότι οι ακτίνες φωτός ακολουθούν την ίδια πορεία προς τη μία κ την αντίστροφη κατεύθυνση σ' ένα οπτικό σύστημα, ονομάζεται "αρχή της αντιστρεψιμότητας"

2 Συχνά, οι αστρονόμοι φωτογραφίζουν χρησιμοποιώντας μόνο τον αντικειμενικό φακό ή το αντικειμενικό κάτοπτρο ενός τηλεσκοπίου, χωρίς προσοφθάλμιο φακό. (α) Δείξτε ότι το μέγεθος h' του ειδώλου που παράγει ένα τέτοιο τηλεσκόπιο είναι $h' = \dfrac{fh}{(f-p)}$, όπου f είναι η εστιακή απόσταση του αντικειμενικού φακού (ή κατόπτρου), h είναι το μέγεθος του αντικειμένου, και p είναι η απόστασή του. β) Κι αν; Απλοποιήστε τη σχέση του ερωτήματος (α) για την περίπτωση στην οποία η απόσταση του αντικειμένου είναι πολύ μεγαλύτερη από την εστιακή απόσταση του αντικειμενικού φακού. (γ) Το "εκπέτασμα" του Διεθνούς Διαστημικού Σταθμού, δηλαδή το συνολικό πλάτος της διάταξης των ηλιακών συλλεκτών του, είναι 108.6 m. Βρείτε το πλάτος του ειδώλου του σταθμού που σχηματίζει ο αντικειμενικός φακός ενός τηλεσκοπίου με εστιακή απόσταση 4 m όταν ο σταθμός βρίσκεται σε τροχιά ύψους 407 km.

ΛΥΣΗ

(α) Ας υποθέσουμε τηλεσκόπιο με αντικειμενικό φακό (που δεν ισχύει στην πράξη) και ας χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση των λεπτών φακών:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = \frac{1}{1/f - 1/p} = \frac{1}{\left(\frac{p-f}{fp}\right)} \Rightarrow q = \frac{fp}{p-f}.$$

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} = \frac{-f}{p-f} \Rightarrow \boxed{h' = \frac{hf}{f-p}}$$

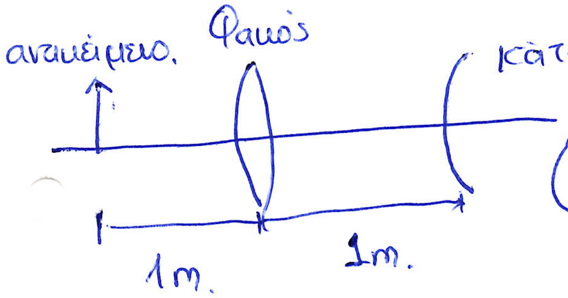
(β) Αν $p \gg f$, τότε $f-p \simeq -p$, κι άρα: $\boxed{h' = -\dfrac{hf}{p}}$

(γ) Ας υποθέσουμε ότι το τηλεσκόπιο παρατηρεί τον σταθμό όταν αυτός βρίσκεται στο κατακόρυφο σημείο πάνω από το τηλεσκόπιο. Τότε:

$$h' = -\frac{hf}{p} = -\frac{(108.6\,\text{m})(4\,\text{m})}{407\times10^{3}\,\text{m}} \Rightarrow \boxed{h' = -1.07\,\text{mm}.}$$

3 Ο φακός και το κάτοπτρο της εικόνας βρίσκονται σε απόσταση $d = 1m$ μεταξύ τους κ' έχουν εστιακές αποστάσεις $+80$ cm και -50 cm, αντίστοιχα. Ένα αντικείμενο τοποθετείται σε απόσταση $p = 1m$ αριστερά από το φακό. (α) Βρείτε τη θέση του τελικού ειδώλου, το οποίο σχηματίζεται από φως που έχει διέλθει δύο φορές από τον φακό. (β) Βρείτε τη συνολική μεγέθυνση του ειδώλου και (γ) αναφέρετε αν το είδωλο είναι όρθιο ή ανεστραμμένο.

ΛΥΣΗ



(α) Ξεκινάμε με την πρώτη διέλευση φωτός από το φακό.

1. $$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}.$$ $f_1 = +80$cm (συγκλίνων φακός)

$p_1 = 100$cm, άρα:

$q_1 = 400$ cm. Είδωλο πραγματικό, στα δεξιά του φακού.

2. Αυτό το είδωλο λειτουργεί ως αντικείμενο για τον καθρέπτη.
Από την εξίσωση των κατόπτρων:
$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2},$$
$f_2 = -50$ cm. (κυρτό κάτοπτρο).
$p_2 = -300$cm. (το αντικείμενο για τον καθρέπτη είναι στα δεξιά, άρα είναι αρνητικό, κ' σε απόσταση $(4-1)m = 3m$).

Άρα: $$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2} \Rightarrow q_2 = -60\text{cm}.$$ Άρα, το είδωλο του καθρέπτη είναι στα δεξιά του (φανταστικό).

3. Αυτό το είδωλο λειτουργεί ως πραγματικό αντικείμενο για τον φακό, οπότε, όταν το φως διέλθει δύο φορές από τον φακό, θα έχουμε:
$$\frac{1}{q_3} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{f_1},$$
$f_1 = 80$cm, $p_3 = 160$ cm (το προηγούμενο q_2 + η απόσταση φακού καθρέπτη) κ' άρα:
$$\frac{1}{q_3} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_3} \Rightarrow q_3 = 160\text{cm}.$$
Πραγματικό είδωλο, στα αριστερά του φακού.

(β) Βρίσκουμε τις μεγεθύνσεις μετά την πρώτη διέλευση του φωτός από το φακό, την ανάκλαση στο κάτοπτρο, κ' τη δεύτερη διέλευση από το φακό:

$$M_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -4, \quad M_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{1}{5}, \quad M_3 = -\frac{q_3}{p_3} = -1.$$

Άρα η ολική μεγέθυνση είναι:

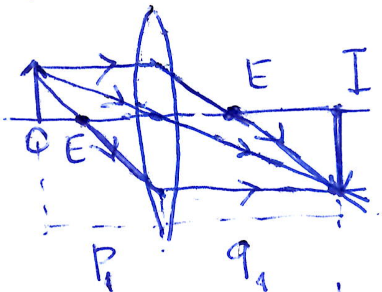
$$M = M_1 M_2 M_3 = -0.8$$

(γ) Αφού $M<0$, το τελικό είδωλο είναι αντεστραμμένο.

4 Σ' ένα σκοτεινό δωμάτιο τοποθετείται ένα αναμμένο κερί σε απόσταση 1.5m από ένα λευκό τοίχο. Ανάμεσα στο κερί & στον τοίχο τοποθετείται ένας φακός σε τέτοια θέση ώστε να σχηματίζει ένα μεγαλύτερο, ανεστραμμένο είδωλο πάνω στον τοίχο. Όταν ο φακός βρίσκεται σ' αυτή τη θέση, η απόσταση του αναμμένου είναι P_1. Όταν ο φακός μετακινηθεί κατά 90cm προς τον τοίχο, πάνω στον τελευταίο σχηματίζεται ένα ακόμα είδωλο του κεριού. Από αυτά τα δεδομένα, πρέπει να βρείτε την απόσταση P_1 και την εστιακή απόσταση του φακού.

ΛΥΣΗ

Αρχική κατάσταση:



$P_1 + q_1 = 1.5$ m. (1)

Στην δεύτερη περίπτωση: $P_2 = P_1 + 90$cm.

ενώ: $q_2 = q_1 - 0.90$ m (2)

Θα πρέπει:
$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{P_1} + \frac{1}{q_1} &= \frac{1}{f}\\ \frac{1}{P_2} + \frac{1}{q_2} &= \frac{1}{f}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{P_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{P_2} + \frac{1}{q_2} \quad (3)$$

Λόγω των (1) & (2), από την (3) έχουμε: $\frac{1}{P} + \frac{1}{1.5 - P_1} = \frac{1}{P_1 + 0.9} + \frac{1}{0.6 - P_1} \Rightarrow$

(1 εξίσωση με ένα άγνωστο) $P_1(1.5 - P_1) = (P_1 + 0.9)(0.6 - P_1) \Rightarrow$

$$P_1 = \frac{0.54}{1.80} \Rightarrow \boxed{P_1 = 0.3 \text{ m.}}$$

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να κάνετε τις πράξεις)

$$P_2 = P_1 + 0.9 \Rightarrow \boxed{P_2 = 1.2 \text{ m.}}$$

Επίσης: $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{0.3} + \frac{1}{1.2} \Rightarrow \boxed{f = 0.24 \text{ m.}}$

Το 2ο είδωλο: $M = -\frac{q_2}{P_2} = \frac{-0.3}{1.2} = -0.25$

είναι ανεστραμμένο,
πραγματικό, & μικρότερο από το αντικείμενο.

5 Ο δίσκος του Ήλιου, όταν παρατηρείται από τη Γη, υποτείνει γωνία 0.533°. Ποια είναι (α) η θέση και (β) η διάμετρος του ηλιακού ειδώλου που σχηματίζεται από ένα κοίλο σφαιρικό κάτοπτρο με ακτίνα καμπυλότητας 3 m;

ΛΥΣΗ

Για το σφαιρικό κάτοπτρο: $f = \frac{R}{2} = +1.5\,m$

Επίσης, επειδή η απόσταση από τον Ήλιο είναι πολύ μεγάλη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $p \simeq \infty$. Άρα, από την εξίσωση των κατόπτρων:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = f = 1.5\,m \quad (α).$$

Η μεγέθυνση του ειδώλου είναι πολύ μικρή: $M = -\frac{q}{p} = \frac{h'}{h}$, αφού p πολύ μεγάλο. Εμείς ζητάμε το h'. Μπορούμε να το υπολογίσουμε, αφού: $\frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \Rightarrow \frac{h}{p} = -\frac{h'}{q}$.

Όμως $\frac{h \text{ (η πραγματική διάμετρος του Ήλιου)}}{p \text{ (απόσταση}}$ = γωνιακή διάμετρος του Ήλιου, όταν παρατηρείται από τη Γη = 0.533°.

Άρα: $|h'| = \frac{hq}{p} = 0.533° \cdot q$

Αν μετατρέψουμε τις γωνίες σε ακτίνια, & χρησιμοποιήσουμε τη σχέση: $s = r\theta$, θα έχουμε:

$$|h'| = 0{,}533° \, \frac{\pi}{180} \, \frac{rad}{deg} \, 1.5\,m \Rightarrow \boxed{|h'| = 1.4\,cm} \quad (β).$$

6 Υποθέστε ότι σε μία συγκεκριμένη θέση η ένταση του ηλιακού φωτός είναι $1\ kW/m^2$. Πρόκειται να τοποθετήσετε ένα εξαιρετικά ανακλαστικό κοίλο κάτοπτρο με την όψη του προς τον Ήλιο έτσι ώστε να παράγει στη θέση του ειδώλου ισχύ τουλάχιστον $350\ W$. (α) Αν ο δίσκος του Ήλιου υποτείνει γωνία $0.533°$ βρείτε την απαιτούμενη ακτίνα R_a της κυκλικής εμπρόσθιας επιφάνειας του κατόπτρου. (β) Τώρα υποθέστε ότι η ένταση του φωτός πρέπει να είναι τουλάχιστον $120\ KW/m^2$ στη θέση του ειδώλου. Βρείτε την απαιτούμενη σχέση που συνδέει την R_a με την ακτίνα καμπυλότητας R του κατόπτρου.

ΛΥΣΗ

(α) Έστω $I_o = 1\,kW/m^2$ η ένταση του ηλιακού φωτός. Για κοίλο σφαιρικό κάτοπτρο με ακτίνα R_a της κυκλικής εμπρόσθιας επιφάνειας, η επιφάνεια που συλλέγει ηλιακό φως είναι πR_a^2. Αφού το κάτοπτρο είναι εξαιρετικά ανακλαστικό, θα πρέπει αυτή να είναι ίση η ισχύς στη θέση του ειδώλου. Άρα:

$$P = 350\,W = I_o \pi R_a^2 \Rightarrow \boxed{R_a = 0.334\,m}$$ (ή μεγαλύτερα αν η ισχύς είναι μεγαλύτερη από 350 W).

β). Αν η διάμετρος του ειδώλου είναι h', τότε, η ένταση του φωτός στη θέση του ειδώλου θα είναι:

$$I = \frac{P}{\pi (h'/2)^2} \Rightarrow I = \frac{4 I_o \pi R_a^2}{\pi h'^2} \quad (1).$$

Για να βρούμε το h', δουλεύουμε όπως ς στην προηγούμενη άσκηση:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}, \text{ αφού } p \to \infty, \quad q = \frac{R}{2} \quad (2).$$

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \Rightarrow |h'| = q\left(\frac{h}{p}\right) = \frac{R}{2}\left(0.533 \frac{\pi}{180} \text{rad.}\right) = \frac{R}{2}(9.30\,\text{mrad}) \quad (3)$$

Λόγω της (3), η (1) γράφεται:

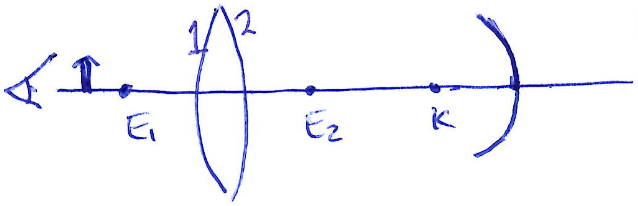
$$I = \frac{4 I_o \pi R_a^2}{\pi \frac{R^2}{4}(9.3\times10^{-3})^2} \Rightarrow \left(\frac{R_a}{R}\right)^2 = \frac{I\pi(9.3\times10^{-3})^2}{16\pi I_o} \Rightarrow \frac{R_a}{R} = 0.0255$$

(ή μεγαλύτερο)

$$\left(I = 120\,\frac{kW}{m^2},\ I_o = 1\,kW/m^2\right).$$

7 Στην εικόνα φαίνεται ένας λεπτός συγκλίνων φακός του οποίου οι επιφάνειες έχουν ακτίνες καμπυλότητας 9 cm και 11cm. Ο φακός βρίσκεται μπροστά από ένα κοίλο σφαιρικό κάτοπτρο με ακτίνα καμπυλότητας $R=8$ cm. Υποθέστε ότι οι εστίες E_1 και E_2 του φακού απέχουν 5cm από το κέντρο του. (α) Βρείτε τον δείκτη διάθλασης του υλικού του φακού. Ο φακός και το κάτοπτρο απέχουν μεταξύ τους 20 cm, ενώ σε απόσταση 8cm αριστερά από τον φακό υπάρχει ένα αντικείμενο. Βρείτε (β) τη θέση του τελικού ειδώλου και (γ) τη μεγέθυνσή του όπως την αντιλαμβάνεται το μάτι του παρατηρητή της εικόνας. (δ) Το τελικό είδωλο είναι όρθιο ή ανεστραμμένο; Εξηγήστε.

ΛΥΣΗ



(α) Από την εξίσωση κατασκευαστών φακών, έχουμε:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),$$ όπου:

$f=+5$cm (συγκλίνων), $R_1=9$cm, $R_2=-11$cm, άρα:

$$(n-1)=\frac{1}{f\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]} \Rightarrow \boxed{n=1.99.}$$

(β). 1) Την πρώτη φορά που φως περνάει μέσα από το φακό, ισχύει:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{8cm}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{5cm} \Rightarrow q_1=13.3cm$$ (στα δεξιά του φακού)

πραγματικό είδωλο, ανεστραμμένο, και: $M_1=-\frac{q_1}{p_1} \Rightarrow M=-1.67$

2) Αυτό το είδωλο είναι το αντικείμενο για το κάτοπτρο, με:

$P_2=20-13.3cm=6.67cm$, και $f=\frac{R}{2}=+4$ cm. Άρα:

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f} \Rightarrow q_2=10cm, \text{ και } M_2=-\frac{q_2}{p_2}=-\frac{10}{6.67}=-1.5$$

Το είδωλο είναι πραγματικό, βρίσκεται σε απόσταση 10cm στα αριστερά του κατόπτρου, κι αποτελεί το (πραγματικό) αντικείμενο για το φακό. Άρα, τελικά: 8

3). $P_3=20-q_2=10cm$, και άρα $\frac{1}{10}+\frac{1}{q_3}=\frac{1}{5} \Rightarrow q_3=10cm$

(στα αριστερά του φακού), πραγματικό είδωλο, κι ανεστραμμένο, αφού $M_3=-\frac{q_3}{p_3}=-1$. Ολική μεγέθυνση: $M_{tot}=M_1M_2M_3=\underline{-2.5}$.