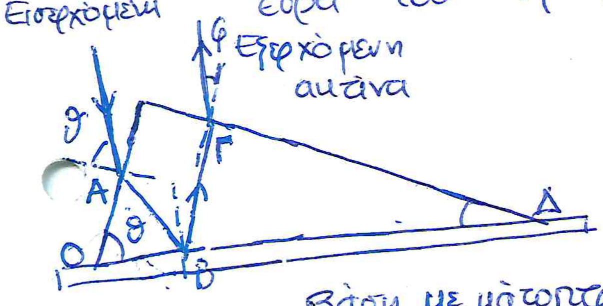
Ασκήσεις Κεφαλαίου 01

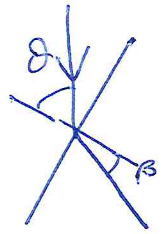
1 Μία ακτίνα φωτός που διαδίδεται στον αέρα προσπίπτει σε μία έδρα ενός πρίσματος, η μία γωνία του οποίου είναι ορθή, με δείκτη διάθλασης $n = 1.5$. Η ακτίνα ακολουθεί τη διαδρομή που φαίνεται στην εικόνα. Αν $\theta = 60^\circ$ και η βάση του πρίσματος διαθέτει κάτοπτρο, βρείτε τη γωνία ϕ που σχηματίζει η εξερχόμενη ακτίνα με την κάθετο στη δεξιά έδρα του πρίσματος.



ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την άσκηση η γωνία θ μεταξύ της προσπίπτουσας ακτίνας & της καθέτου στο A είναι ίση με τη γωνία στο O.

$n_1 = 1, \quad n_2 = 1.5.$



Νόμος του Snell στο σημείο A:

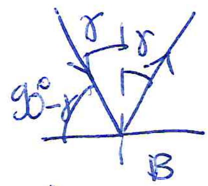
$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\beta \Rightarrow$

$\sin\beta = \frac{\sin 60^\circ}{1.5} \Rightarrow \beta = 35.3^\circ.$

Από το τρίγωνο AOB, έχουμε:

$\theta + (90^\circ - \beta) + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 24.7^\circ$

(γ είναι η γωνία μεταξύ της προσπίπτουσας & της καθέτου στο σημείο B:

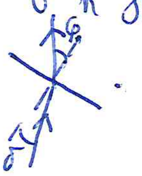


)

Τώρα, χρησιμοποιώντας το τρίγωνο ΒΓΔ: $(90^\circ - \gamma) + (90^\circ - \delta) + (90^\circ - \theta) = 180^\circ \Rightarrow$

$\delta = 5.30^\circ.$

Όπου: $90^\circ - \theta = \hat{\Gamma\Delta B}$, και δ η γωνία μεταξύ της προσπίπτουσας & της καθέτου στο σημείο Γ:



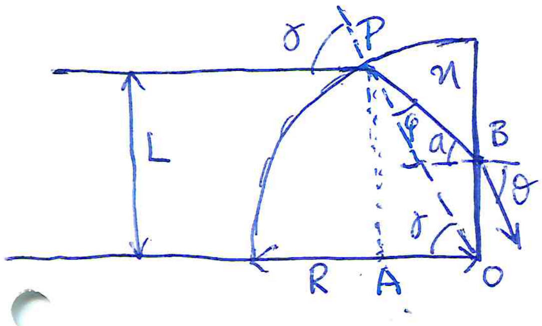
. Άρα, εφαρμόζοντας το νόμο του Snell στο σημείο Γ:

$n_2 \sin(\delta) = n_1 \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 1.5 \sin(5.30^\circ) \Rightarrow$

$\varphi = \sin^{-1}[1.5 \sin(5.30^\circ)] \Rightarrow \boxed{\varphi = 7.96^\circ}$

2 Ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n περιβάλλεται από κενό και έχει το σχήμα ενός κυλινδρικού τεταρτημορίου ακτίνας R. Μια ακτίνα φωτός παράλληλη στη βάση του υλικού προσπίπτει από τα αριστερά σε απόσταση L πάνω από τη βάση, και εξέρχεται από το υλικό υπό γωνία θ. Βρείτε τη σχέση που δίνει τη γωνία θ συναρτήσει των n, R και L.

ΛΥΣΗ



Η γωνία μεταξύ της προσπίπτουσας & της καθέτου στο P είναι γ. Το ίδιο & η $P\hat{O}A$. Από το τρίγωνο AOP, έχουμε:

$$\sin\gamma = \frac{PA}{PO} = \frac{L}{R} \cdot (1)$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Snell στο P:

$$1 \cdot \sin\gamma = n \cdot \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sin(\gamma)}{n} = \frac{L}{nR} \cdot (2).$$

Από το τρίγωνο OPB, έχουμε:

$$(90^\circ - \gamma) + \varphi + (90^\circ + a) = 180^\circ \Rightarrow a = \gamma - \varphi$$

(a η γωνία μεταξύ της προσπίπτουσας & της καθέτου στο B).

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Snell στο B:

$$n \sin a = 1.0 \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = n \sin(a) = n \sin(\gamma - \varphi) = n[\sin\gamma\cos\varphi - \cos\gamma\sin\varphi] \quad (3)$$

Λόγω των (1) & (2), & της τριγωνομετρικής ταυτότητας: $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$,

έχουμε:

$$\cos(\gamma) = \frac{\sqrt{R^2 - L^2}}{R} \quad (4)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{n^2R^2 - L^2}}{nR} \quad (5).$$

Χρησιμοποιώντας τις (4), (5), (1), (2) & αντικαθιστώντας στην (3), έχουμε τελικά:

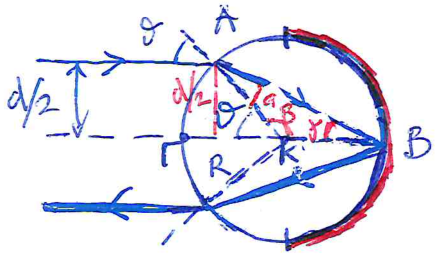
$$\sin(\theta) = \frac{L}{R^2}\left(\sqrt{n^2R^2 - L^2} - \sqrt{R^2 - L^2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = \sin^{-1}\left[\frac{L}{R^2}\left(\sqrt{n^2R^2 - L^2} - \sqrt{R^2 - L^2}\right)\right]}.$$

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να κάνετε τις αλγεβρικές πράξεις).

3 Στο δεξιό μισό ενός διαφανούς κυλίνδρου ακτίνας $R = 2m$, υπάρχει κάτοπτρο. Μια ακτίνα φωτός που διαδίδεται στον αέρα προσπίπτει στην αριστερή πλευρά του κυλίνδρου. Η προσπίπτουσα ακτίνα και η εξερχόμενη ακτίνα είναι παράλληλες κ' απέχουν μεταξύ τους $d = 2m$. Βρείτε τον δείκτη διάθλασης του υλικού.

ΛΥΣΗ



Η γωνία μεταξύ της προσπίπτουσας και της κάθετης στο A είναι:

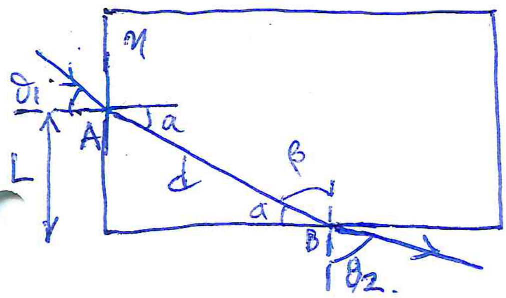
$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{(d/2)}{R}\right] = 30^\circ.$$

Αν η εξερχόμενη ακτίνα είναι παράλληλη με την προσπίπτουσα, τότε η διαδρομή στον κύλινδρο θα πρέπει να είναι συμμετρική ως προς την διάμετρο ΓΒ (παράλληλη ως προς την προσπίπτουσα ακτίνα). Από το ισοσκελές τρίγωνο AKB: $\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$, $\alpha = \gamma$, κ' $\beta = 180^\circ - \theta$, άρα: $\alpha = \frac{\theta}{2} = 15^\circ$ ($\alpha = K\hat{A}B$, $\gamma = K\hat{B}A$, κ' $\beta = A\hat{K}B$). Άρα, σύμφωνα με τον νόμο του Snell στο σημείο A:

$$1 \sin\theta = n \cdot \sin\alpha \Rightarrow n = \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{n = 1.93}$$

4 Μια ακτίνα φωτός εισέρχεται σ' ένα ορθογώνιο κομμάτι από πλαστικό υπό γωνία $\theta_1 = 45^\circ$ και εξέρχεται υπό γωνία $\theta_2 = 76^\circ$. (α) Βρείτε το δείκτη διάθλασης του πλαστικού υλικού. (β) Αν η φωτεινή ακτίνα εισέρχεται στο πλαστικό από το σημείο που απέχει $L = 50$ cm από το κάτω άκρο, ποιο είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να διασχίσει το πλαστικό;

ΛΥΣΗ



(α) Ο νόμος του Snell στο σημείο A γράφεται:

$$(1.0)\sin\theta_1 = n \sin(a) \quad (1).$$

Η γωνία μεταξύ της προσπίπτουσας & της καθέτου στο σημείο B είναι: $\beta = 90^\circ - a$. Άρα, ο νόμος του Snell στο σημείο B γράφεται:

$$n\sin(\beta) = 1\sin(\theta_2) \Rightarrow n\sin(90^\circ - a) = 1\sin(\theta_2) \Rightarrow$$

$$n\cos a = \sin\theta_2 \quad (2).$$

Διαιρώντας τις (1) & (2) παίρνουμε: $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \Rightarrow$

$$\tan(a) = 0.729 \Rightarrow a = 36.1^\circ.$$

Οπότε, από την (1) έχουμε: $n = \frac{\sin\theta_1}{\sin(a)} = \frac{\sin(45^\circ)}{\sin(36.1^\circ)} \Rightarrow$

$$\boxed{n = 1.2}$$

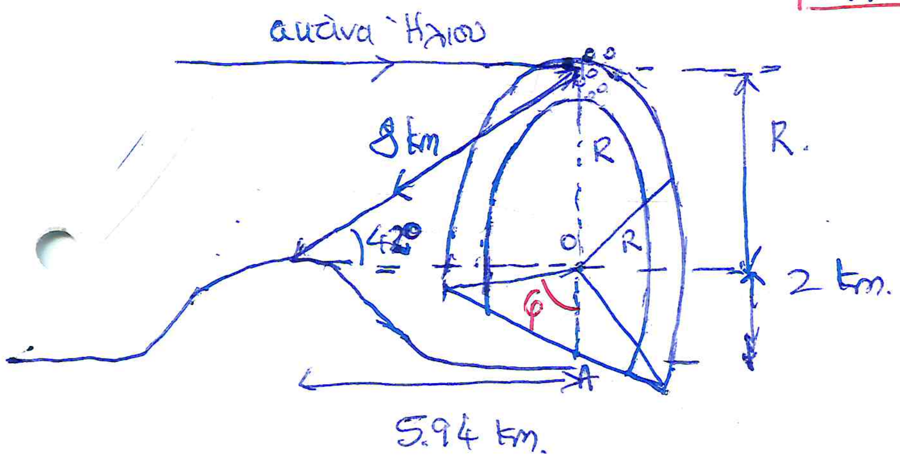
(β). Η απόσταση που διατρέχει το φως στο πλαστικό είναι: $d = \frac{L}{\sin a}$, & η ταχύτητα διάδοσης είναι: $u = \frac{c}{n}$. Άρα:

$$t = \frac{d}{u} = \frac{nL}{c\sin a} = 3.4 \times 10^{-9}\,s \Rightarrow \boxed{t = 3.4\ ns.}$$

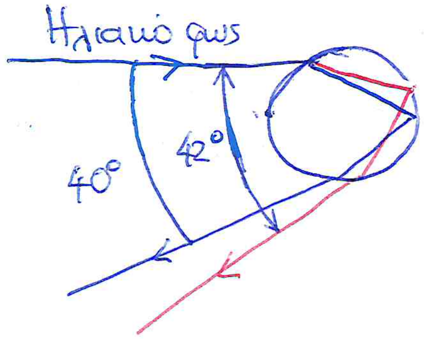
(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να κάνετε τις πράξεις).

5 Μία πεζοπόρος στέκεται σε μία απομονωμένη βουνοκορφή την ώρα που δύει ο Ήλιος. Παρατηρεί το ουράνιο τόξο που δημιουργούν τα σταγονίδια του νερού στον αέρα, τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 8 km προς την κατεύθυνση του έντονα φωτεινού τμήματος του τόξου. Το ύψος της κορυφής είναι 2 km. Ποιο ποσοστό του πλήρους κυκλικού τμήματος του ουράνιου τόξου μπορεί να δει η πεζοπόρος;

ΛΥΣΗ



Οριζόντιες ακτίνες από τον Ήλιο που δύει περνάνε πάνω από την πεζοπόρο. Διαθλώνται δύο φορές, κ̓ ανακλώνται, από τις κατάλληλες σταγόνες, κ̓ φαίνονται από την πεζοπόρο ως ουράνιο τόξο.



Η πεζοπόρος βλέπει το εσωτερικό μπλε τμήμα κ̓ το εξωτερικό κόκκινο τμήμα του ουρανίου τόξου. Μελετάμε το δεύτερο.
Η ακτίνα του ουρανίου τόξου είναι:

$$R = 8\,km \sin(42°) = 5.35\ km.$$

Η γωνία φ μεταξύ της ακτίνας του σημείου που το ουράνιο τόξο "ακουμπάει" στο έδαφος κ̓ της καθέτου OA είναι:

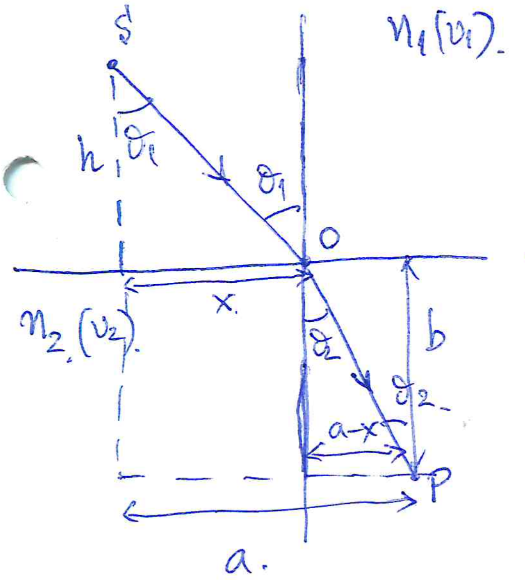
$$\cos\varphi = \frac{2\,km}{R} = \frac{2\ km}{5.35\,km} = 0.374 \Rightarrow \varphi = 68.1°.$$

Άρα, το τμήμα κύκλου που δεν μπορεί να δει η πεζοπόρος είναι: $2 \times 68.1° = 136.2°$.
Οπότε, το ποσοστό του πλήρους κυκλικού τμήματος του ουρανίου τόξου που μπορεί να δει η πεζοπόρος είναι:

$$\frac{360° - 136.2°}{360°} = \frac{223.8°}{360°} = \boxed{62.2\%}.$$

6 Ο Pierre de Fermat (1601–1665) απέδειξε ότι όταν το φως διαδίδεται από το ένα σημείο σε κάποιο άλλο, η πραγματική διαδρομή του είναι εκείνη που απαιτεί τον λιγότερο χρόνο. Αυτή η πρόταση είναι γνωστή ως αρχή του Fermat. Το απλούστερο παράδειγμα είναι το φως που διαδίδεται σ' ένα ομογενές μέσο. Το φως διαδίδεται ευθύγραμμα επειδή η ευθεία είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Αποδείξτε τον νόμο της διάθλασης του Snell χρησιμοποιώντας την αρχή του Fermat.

ΛΥΣΗ



Ο χρόνος διάδοσης από το σημείο S στο O & από το O στο P είναι:

$$t = \frac{SO}{\upsilon_1} + \frac{OP}{\upsilon_2} \Rightarrow$$

$$t = \frac{(h^2+x^2)^{1/2}}{\upsilon_1} + \frac{\left[b^2+(a-x)^2\right]^{1/2}}{\upsilon_2}$$

Η αρχή του Fermat μας λέει ότι η διαδρομή που θα ακολουθήσει το φως από το S στο P θα είναι τέτοια ώστε:

$\frac{dt}{dx} = 0$ (αυτό ισχύει για την διαδρομή που απαιτεί το μικρότερο χρόνο). Άρα:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{\upsilon_1 (h^2+x^2)^{1/2}} - \frac{(a-x)}{\upsilon_2 \left[b^2+(a-x)^2\right]^{1/2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\upsilon_1} \underbrace{\frac{x}{(h^2+x^2)^{1/2}}}_{\sin\theta_1} = \frac{1}{\upsilon_2} \underbrace{\frac{a-x}{\left[b^2+(a-x)^2\right]^{1/2}}}_{\sin\theta_2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\upsilon_1} = \frac{\sin\theta_2}{\upsilon_2} \Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{c/n_1} = \frac{\sin\theta_2}{c/n_2} \Rightarrow \boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$$