

ΦΥΛΛΑΡΙΟ 12

1 Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα 4×10^{14} Hz διαδίδεται στο κενό, προς την θετική κατεύθυνση του άξονα x . Το κύμα έχει το ηλεκτρικό του πεδίο παράλληλο στον άξονα y , με πλάτος E_m . Τη χρονική στιγμή $t = \phi$, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P , πάνω στον άξονα x , έχει τιμή $+E_m/4$ & μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Πόση είναι η απόσταση, κατά μήκος του άξονα x , από το σημείο P μέχρι το πρώτο σημείο με $E = \phi$, αν το αναζητήσουμε (α) προς την αρνητική κατεύθυνση & (β) προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x ;

ΛΥΣΗ Έστω το κύμα: $E_y = E_m \cos(kx - \omega t)$, όπου:

$$\frac{2\pi f}{k} = c \Rightarrow k = \frac{2\pi f}{c}, \quad f = 4 \times 10^{14} \text{ Hz}, \quad \text{Για } t = \phi, \quad E_y = E_m \cos kx.$$

Για $x = \phi$, $E_y = E_m$, άρα είμαστε τη στιγμή, στην αρχή των άξονων έχουμε μέγιστο. Το σημείο P βρίσκεται σε απόσταση x από την αρχή των άξονων, τέτοια ώστε:

$$\frac{E_m}{4} = E_m \cos kx_P \Rightarrow kx_P = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow x_P = \frac{1}{k} \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \quad (1)$$

Το πρώτο σημείο με $E = \phi$ προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x βρίσκεται στη θέση: $x_{\min} = -\lambda/4$. Και στη θετική κατεύθυνση του άξονα: $x_{\min+} = \lambda/4$. Άρα:

$$a) \quad d_1 = \frac{1}{k} \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\lambda}{4} = \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^{-1} \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\lambda}{4} = \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^{-1} \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{c}{4f} \Rightarrow$$
$$d_1 = \left[1.2 \times 10^{-7} \times 0.42\pi + 1.9 \times 10^{-7} \right] = 350 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

$$b) \quad d_2 = \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{k} \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \dots = 325 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

2] Μια ιστροπική σημειακή πηγή εμιττει φως με μήκος κύματος 500 nm, και ισχύ 200 W. Ένας αισθητής φως είναι τοποθετημένος σε απόσταση 400 m από την πηγή. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται με τον χρόνο η μαγνητική συνιστώσα του φωτός, $\frac{\partial B}{\partial t}$, στη θέση του αισθητήρα;

ΛΥΣΗ

Η σημειακή πηγή εμιττει φως ακτινικά, προς όλες τις κατευθύνσεις, δηλ. εμιττει ένα σφαιρικό κύμα. Προς μια τυχαία κατεύθυνση, θα ισχύει:

$$B = B_m \cos(kx - \omega t), \text{ και άρα } \frac{\partial B}{\partial t} = -B_m \omega \sin(kx - \omega t).$$

Άρα, σε κάθε σε κάθε σημείο που απέχει απόσταση x από την πηγή, ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής του B θα είναι $B_m \omega$, μόνο που το B_m σ' αυτή την περίπτωση δεν παραμένει σταθερό, αλλά ελαττώνεται με την απόσταση x .

Η ισχύς της πηγής ακτινοβολίας είναι φυσικά σταθερή στα 200 W. Όμως αυτή η ισχύς ακτινοβολείται, ιστροπικά, προς όλες τις κατευθύνσεις. Άρα η ένταση της ακτινοβολίας, θα ελαττώνεται με την απόσταση x , ως εξής:

$$I(x) = \frac{\text{ισχύς πηγής ακτινοβολίας}}{\text{επιφάνεια μέγιστου κύματος}} = \frac{200 \text{ W}}{4\pi x^2} = \frac{B_m^2(x) c}{2\mu_0}$$

Για απόσταση $x = 400 \text{ m}$, θα έχουμε: $I = \frac{200 \text{ W}}{4\pi (400 \text{ m})^2} = 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

Οπότε: $I = \frac{B_m^2(x) c}{2\mu_0} \Rightarrow B_m(x) \omega = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}} \cdot \omega = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow$

$$B_m(x=400 \text{ m}) \omega = \dots = 3.5 \times 10^6 \text{ T s}^{-1}.$$

3] Τα επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία εμπερνούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Υπολογίστε το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που παράγει ένα πρωτόνιο μάζας m_p , το οποίο διαγράφει κυκλική τροχιά κινούμενο σε ένα μαγνητικό πεδίο μέτρου B .

ΛΥΣΗ

Έστω v η ταχύτητα του πρωτονίου (κινείται στο \vec{B}). Το πρωτόνιο θα δέχεται δύναμη: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, με μέτρο $F = qvB$. Δεδομένου ότι το πρωτόνιο διαγράφει κυκλική τροχιά θα ισχύει:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

Η περίοδος της κυκλικής κίνησης του πρωτονίου θα είναι:

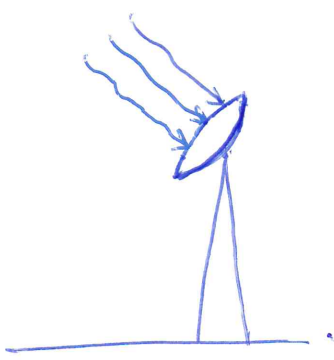
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}, \text{ ή η συχνότητα}$$

της κυκλικής κίνησης: $f = \frac{1}{T}$

Αυτή συχνότητα είναι ξ η συχνότητα εμπερνούν ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας του πρωτονίου, ξ άρα:

$$\lambda = \frac{c}{f} = cT \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi m_p c}{qB}}$$

4) Μια παραβολική κεραία διαμέτρου 20 m λαμβάνει ένα ραδιοσήμα (που προσπίπτει κάθετα σ' αυτήν) από μία απομακρυσμένη πηγή. Το ραδιοσήμα είναι ένα συνεχές ημιτονοειδές κύμα με πλάτος $E_{max} = 0.2 \mu\text{V/m}$.



Έστω ότι η κεραία απορροφά πλήρως την αυτιοβολία που προσπίπτει στο κάτοπτρό της. α) Πόσο είναι το πλάτος του μαγνητικού πεδίου αυτού του κύματος; β) Πόση είναι η ένταση της αυτιοβολίας που λαμβάνει η κεραία; γ) Πόση είναι η ισχύς που λαμβάνει η κεραία; δ) Πόση δύναμη ασκεί στην κεραία τα ραδιοφωνικά κύματα;

ΛΥΣΗ

α) Για ηλεκτρομαγνητικό κύμα, $\frac{E_{max}}{B_{max}} = c \Rightarrow$

$$B_{max} = 6.67 \times 10^{-16} \text{ T}$$

β). (γ' ορισμού I (ισχύς αυτιοβολίας) $\equiv S_{μέσο} = \frac{\epsilon_0 c E_{max}^2}{2} = \frac{c B_{max}^2}{2\mu_0}$. Στη δική μας περίπτωση: $S_{μέσο} = 5.31 \times 10^{-17} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.)

γ). Η ισχύς που λαμβάνει η κεραία είναι:

$$P_{ισχύς} = S_{μέσο} \cdot A, \text{ όπου } A \text{ η επιφάνεια της κεραίας (ίση με } 400 \text{ m}^2\text{), άρα: } P_{ισχύς} = 1.67 \times 10^{-14} \text{ W.}$$

δ). Θεωρούμε φυσικά ότι η κεραία απορροφά ολόκληρο το ραδιοφωνικό κύμα, ή άρα η πίεση που υφίσταται είναι ίση με $\frac{S_{μέσο}}{c}$, ή άρα, η δύναμη που δέχεται είναι ίση με:

$$F = P_{πίεση} \cdot A = \frac{S_{μέσο}}{c} \cdot A = 5.56 \times 10^{-23} \text{ N (αμελητέα)}$$

ΟΙ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΣΤΕ ΣΕ ΘΕΣΗ ΝΑ ΚΑΝΕΤΕ ΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΛΕΠΤΟΜΕΡΩΣ.

5 Ένα επίπεδο ημιτονοειδές ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα 90 MHz διαδίδεται στο κενό, στη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Η μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι $2 \frac{mV}{m}$ και είναι προσανατολισμένο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα y. Βρείτε: α) το μήκος κύματος, β) την περίοδο, και γ) τη μέγιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου. δ) Γράψτε τις σχέσεις σε μονάδες SI, για την διακύμανση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στον χρόνο και στο χώρο. Συμπεριλάβετε αριθμητικές τιμές και τα κατάλληλα μοναδιαία διανύσματα για να δείξετε τις σχετικές κατευθύνσεις. ε) Βρείτε τη μέση ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας που μεταφέρει το κύμα κατά τη διάδοσή του στο κενό. στ) Βρείτε τη μέση πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας (σε joule ανά κυβικό μέτρο). ζ) Ποση πίεση ακτινοβολίας θα ασκούσε αυτό το κύμα αν προσπίπτει κάθετα σε μία ηχηρως ανακλαστική επιφάνεια;

ΛΥΣΗ Με βάση τα δεδομένα της άσκησης: $f = 90 \text{ MHz}$,

$$E_{\max} = 2 \times 10^{-3} \text{ V/m } (= 2 \text{ mV/m}).$$

$$\alpha) \lambda = \frac{c}{f} = 3.33 \text{ m}, \quad \beta) T = \frac{1}{f} = 1.11 \times 10^{-8} \text{ s } (= 11 \text{ ns}), \quad \gamma)$$

$B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = 6.67 \times 10^{-12} \text{ T } (= 6.67 \text{ pT}).$ δ) Το μαγνητικό πεδίο είναι προσανατολισμένο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα z, και άρα:

$$\vec{E} = \frac{2 \text{ mV}}{\text{m}} \cos \left(\frac{2\pi x}{3.33 \text{ m}} - \frac{t}{11.1 \text{ ns}} \right) \hat{j}$$

$$\vec{B} = 6.67 \text{ pT} \cos \left(\frac{2\pi x}{3.33 \text{ m}} - \frac{t}{11.1 \text{ ns}} \right) \hat{k}.$$

(Αφού το κύμα διαδίδεται στην κατεύθυνση του \hat{i} , το B_{\max} πρέπει να είναι προσανατολισμένο στο \hat{k} , έτσι ώστε το \vec{S} , να είναι ανάλογο του $\vec{E} \times \vec{B}$, να είναι προς την κατεύθυνση του \hat{i}).

$$\varepsilon) I \equiv S_{\text{μέσο}} = \frac{E_{\text{max}}^2}{2\mu_0 c} = \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{2(4\pi \times 10^{-7})(3 \times 10^8)} = 5.3 \times 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

στ). Ισχύει ότι

$$I = u_{\text{ακ}} \cdot c \Rightarrow u_{\text{ακ}} = \frac{I}{c} = 1.77 \times 10^{-17} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}.$$

ζ). Αφαιρέσουμε για μήπως αναλογιστεί επιφάνεια:

$$P_{\text{πίεση}} = \frac{2I}{c} = \frac{2 \times 5.3 \times 10^{-9}}{3 \times 10^8} \text{ Pa} = 3.54 \times 10^{-17} \text{ Pa}.$$

6. Ένα μικρό διαστημόηχο, του οποίου η μάζα είναι $1.5 \times 10^3 \text{ kg}$ (συμπεριλαμβανομένου του αστροναύτη), κινείται στο εξωτερικό διάστημα ενώ πάνω του ενεργούν αμελητέες βαρυτικές δυνάμεις. Αν ο αστροναύτης ενεργοποιήσει μία δέσμη αυτίνων laser των 10 kW , πόση ταχύτητα θα αποκτήσει το διαστημόηχο σε 1 ημέρα λόγω της ορμής που μεταφέρεται από τη δέσμη;

ΛΥΣΗ

Η δέσμη αυτίνων laser μεταφέρει ενέργεια μακριά από το διαστημόηχο, ή αρα ορμή που είναι ίση με: $p = U/c$, όπου U η ενέργεια που εκδιέμπεται. Λεξιλογίου ότι η ολική ορμή του διαστημόηχου ή της αυτοβοχίας διατηρείται, η ορμή που θα αποκτήσει το διαστημόηχο θα είναι ίση (σε μέτρο) με U/c . Αν η ισχύ της αυτοβοχίας είναι P , τότε η ενέργεια που εκδιέμπεται σε χρόνο t θα είναι ίση με: $U = Pt$. Άρα, η ορμή του διαστημόηχου θα είναι: $p = Pt/c$, εάν έχει μάζα m , η ταχύτητα του θα είναι:

$$v = \frac{p}{m} = \frac{Pt}{cm} = \frac{(10 \times 10^3 \text{ W})(1 \text{ ημέρα} = 86400 \text{ s})}{1.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/s}} \Rightarrow$$

$$v = 1.9 \times 10^{-3} \text{ m/s} = 1.9 \text{ mm/s}.$$