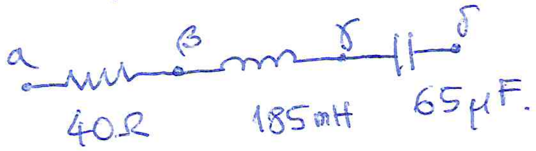
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 11

1 Στα σημεία α και δ της εικόνας συνδέεται μία πηγή ΕΡ με $\Delta V_{max}=150V$ και $f=50Hz$. Υπολόγισε τις μέγιστες τάσεις μεταξύ των σημείων (α) α και β, (β) β και γ, (γ) γ και δ, και (δ) β και δ.



ΛΥΣΗ.

Η επαγωγική και χωρητική αντίσταση είναι:

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi(50)65\times10^{-6}}=49\,\Omega.$$

$$X_L=\omega L=2\pi(50)(185\times10^{-3})=58.1\,\Omega.$$

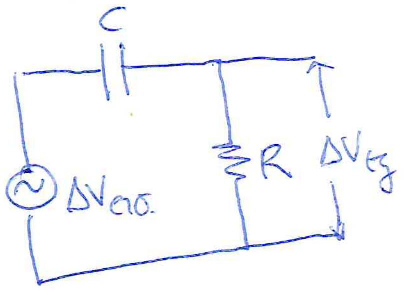
Επομένως, η εμπέδηση (ή σύνθετη αντίσταση) του κυκλώματος είναι:

$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=41\,\Omega$, και $I_{max}=\dfrac{\Delta V_{max}}{Z}=\dfrac{150}{41}=3.66A$.

α). $\Delta V_R=I_{max}R=146V$, β) $\Delta V_L=I_{max}X_L=212.5V$,

γ). $\Delta V_C=I_{max}X_C=179.1V$ και: $\Delta V_{\beta\delta,max}=\Delta V_L-\Delta V_C=33.4V$.

2 Το φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων RC της εικόνας έχει ωμική αντίσταση $R=0.5\ \Omega$ και χωρητικότητα $C=613\mu F$. (α) Βρείτε μία σχέση για τον λόγο του πλάτους της τάσης εξόδου προς το πλάτος της τάσης εισόδου, συναρτήσει των R, C και της συχνότητας ω της πηγής ΕΡ. Πόσο είναι αυτός ο λόγος αν η συχνότητα της πηγής είναι 600 Hz; (β) Σε ποια τιμή τείνει ο λόγος αυτός καθώς η συχνότητα μειώνεται προς το μηδέν, ή τείνει προς το άπειρο;



ΛΥΣΗ.

Η Επαγωγική αντίσταση είναι: $X_C = \frac{1}{\omega C}$, άρα

$Z=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$, και: $I_{max} = \frac{\Delta V_{max,εισ}}{Z}$, όπου:

$\Delta V_{max,εισ}$ = το πλάτος της τάσης **εισόδου**.

Το πλάτος της τάσης στα άκρα της αντίστασης ($\equiv$ πλάτος τάσης εξόδου) είναι: $\Delta V_{max,εξ} = I_{max}\cdot R = \frac{\Delta V_{max,εισ}}{Z}\cdot R \Rightarrow$

$$\frac{\Delta V_{max,εξ}}{\Delta V_{max,εισ}} = \frac{R}{Z} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V_{max,εξ}}{\Delta V_{max,εισ}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

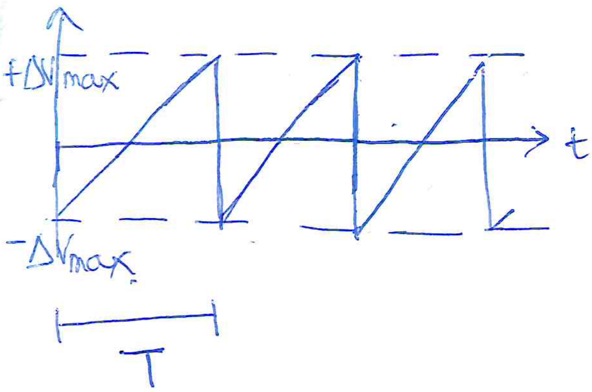
Για $f=600H$, $$\frac{\Delta V_{max,εξ}}{\Delta V_{max,εισ}} = \frac{0.5}{\sqrt{(0.5)^2+\frac{1}{(2\pi 600\cdot 613\times10^{-6})^2}}} = 0.76$$

β). Για $f\to 0$, $Z\to\infty$ και άρα: $\frac{\Delta V_{max,εξ}}{\Delta V_{max,εισ}} \to 0$.

Για $f\to\infty$, $Z\to R$, και άρα: $\frac{\Delta V_{max,εξ}}{\Delta V_{max,εισ}} \to 1$.

(Η διάταξη λειτουργεί ως φίλτρο διέλευσης υψηλών και όχι χαμηλών συχνοτήτων).

3



Δείξτε ότι η ενεργός τιμή της πριονωτής τάσης της εικόνας είναι $\dfrac{\Delta V_{max}}{\sqrt{3}}$.

ΛΥΣΗ

Η μεταβολή της τάσης όπως φαίνεται στην εικόνα είναι περιοδική. Σε κάθε περίοδο, η τάση αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο ως εξής:

$$\Delta V(t) = \frac{2(\Delta V_{max})}{T}t - \Delta V_{max}.$$

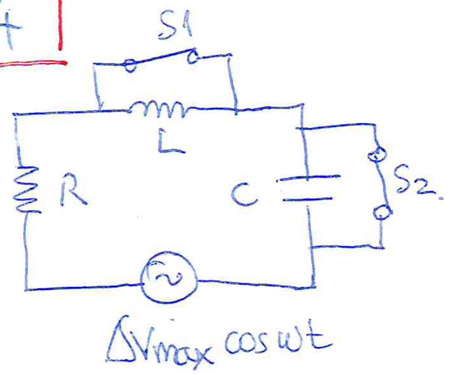
Η ενεργός τάση, εξ' ορισμού, είναι η μέση τιμή της τάσης κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. Στην περίπτωσή μας, επειδή η τάση παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές, θα υπολογίσω τη μέση τιμή του τετραγώνου της τάσης και στη συνέχεια την τετραγωνική της ρίζα. Άρα:

$$\langle \Delta V^2 \rangle_{\text{μέσο}} = \frac{1}{T}\int_0^T (\Delta V)^2\,dt = \frac{(\Delta V_{max})^2}{T}\int_0^T \left(\frac{2}{T}t - 1\right)^2 dt \Rightarrow$$

$$\langle \Delta V^2 \rangle_{\text{μέσο}} = \frac{(\Delta V_{max})^2}{T}\left(\frac{T}{2}\right)\frac{(2t/T - 1)^3}{3}\Bigg|_0^T = \frac{(\Delta V_{max})^2}{6}\left[(+1)^3 - (-1)^3\right] \Rightarrow$$

$$\langle \Delta V^2 \rangle_{\text{μέσο}} = \frac{(\Delta V_{max})^2}{3} \Rightarrow \quad \Delta V_{rms} \equiv \sqrt{\langle \Delta V^2 \rangle_{\text{μέσο}}} = \frac{\Delta V_{max}}{\sqrt{3}}.$$

4



Στο κύκλωμα της εικόνας όλα τα μεγέθη είναι γνωστά εκτός από τη χωρητικότητα C. Βρείτε (α) το ρεύμα στο κύκλωμα συναρτήσει του χρόνου και (β) την ισχύ που αποδίδεται στο κύκλωμα. γ) Βρείτε το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου μετά το άνοιγμα μόνο του διακόπτη S_1. (δ) Μετά το άνοιγμα και του διακόπτη S_2, το ρεύμα κ' η τάση είναι σε φάση. Βρείτε τη χωρητικότητα C. Βρείτε επίσης (ε) τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος κ' με τους δύο διακόπτες ανοιχτούς, (στ) τη μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο κατά τις ταλαντώσεις. (ζ) Τώρα η συχνότητα της πηγής διπλασιάζεται. Βρείτε τη διαφορά φάσης μεταξύ του ρεύματος και της τάσης της πηγής. (η) Βρείτε σε ποια συχνότητα η επαγωγική αντίσταση γίνεται ίση με το μισό της χωρητικής αντίστασης.

ΛΥΣΗ

α) Και με τους δύο διακόπτες κλειστούς, ρεύμα διαρρέει μόνο την πηγή ΕΡ και την αντίσταση. Άρα: $i(t) = \frac{\Delta V_{max}}{R}\cos\omega t$

β) Η μέση ισχύς δίνεται από τη σχέση: $P_{μέση} = \frac{1}{2} I_{max} \Delta V_{max}$ ($\varphi = 0$ σ' αυτή την περίπτωση), άρα: $P_{μέση} = \frac{1}{2}\frac{(\Delta V_{max})^2}{R}$.

γ) Όταν ανοίγουμε τον διακόπτη S_1, ρεύμα διέρχεται από το πηνίο L. Η εμπέδηση του κυκλώματος τώρα είναι: $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ ($X_L = \omega L$), άρα το πλάτος του ρεύματος ισούται με $\frac{\Delta V_{max}}{Z} = \frac{\Delta V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$. Επίσης, εμφανίζεται γωνία φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης ίση με: $\tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right)$, άρα:

$$i(t) = \frac{\Delta V_{max}}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \cos\left[\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right]$$

δ). Μετά το άνοιγμα του διακόπτη, ρεύμα φτάνει ξ στους οπλισμούς του πυκνωτή, και η γωνία φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right), \quad \text{όπου } X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad \text{Άρα:}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \phi \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = \phi \Rightarrow \underbrace{\omega^2 LC = 1}_{\left(\text{συντονισμός, } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)} \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

ε). Σ' αυτή την περίπτωση, αφού $\omega L - \frac{1}{\omega L} = \phi$, $Z = R$.

στ). Η ζητούμενη ενέργεια είναι:

$$U_{max_L} = \frac{1}{2} L I_{max}^2 = \frac{1}{2} L \frac{(\Delta V_{max})^2}{R^2} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ζ). Τώρα: $\omega_{νέα} = 2\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ Άρα:

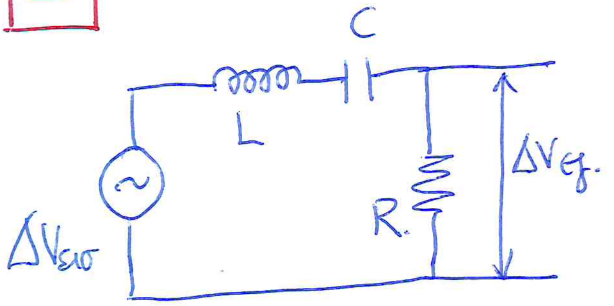
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_{νέα} L - \frac{1}{\omega_{νέα} C}}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right).$$

η). Για τη ζητούμενη συχνότητα:

$$\omega' L = \frac{1}{2}\frac{1}{\omega' C} \Rightarrow \omega' = \frac{1}{\sqrt{2LC}} \Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

5



Ο αντιστάτης της εικόνας αντιστοιχεί στο μεγάφωνο μεσαίων συχνοτήτων ενός ηχείου τριών μεγαφώνων. Θεωρήστε ότι η αντίστασή του είναι σταθερή και ίση με 8 Ω. Η πηγή αντιστοιχεί σ' ένα ενισχυτή ήχου που παράγει σήματα σταθερού πλάτους, $\Delta V_{max} = 10\,V$ σ' όλες τις συχνότητες. Ο συνδυασμός πηνίου και πυκνωτή λειτουργεί ως φίλτρο διέλευσης ζώνης (ζωνοπερατό φίλτρο) με $\dfrac{\Delta V_{max,\varepsilon\xi}}{\Delta V_{max,\varepsilon\iota\sigma}} = \dfrac{1}{2}$ στα 200 Hz και στα 4×10^3 Hz.

Βρείτε τις τιμές που πρέπει να έχουν α) ο συντελεστής αυτεπαγωγής L και β) η χωρητικότητα C. Βρείτε (γ) τη μέγιστη τιμή του λόγου $\Delta V_{max,\varepsilon\xi}/\Delta V_{max,\varepsilon\iota\sigma}$, δ) τη συχνότητα f_0 στην οποία μεγιστοποιείται αυτός ο λόγος, ε) τη διαφορά φάσης μεταξύ $\Delta V_{\varepsilon\iota\sigma}$ και $\Delta V_{\varepsilon\xi}$ στις συχνότητες 200 Hz, f_0 και 4×10^3 Hz και στ) τη μέση ισχύ που μεταφέρεται στο ηχείο στις συχνότητες 200 Hz, f_0 και 4×10^3 Hz. ζ) Θεωρώντας το φίλτρο ως κύκλωμα σε συντονισμό, βρείτε τον συντελεστή ποιότητάς του.

ΛΥΣΗ

α+β). Για το κύκλωμα της εικόνας: $\Delta V_{max,\varepsilon\xi} = \Delta V_{max,R} \Rightarrow$

$$\Delta V_{max,\varepsilon\xi} = I_{max} R \Rightarrow \Delta V_{max,\varepsilon\xi} = \frac{\Delta V_{max,\varepsilon\iota\sigma}}{Z} R \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta V_{max,εξ}}{\Delta V_{max,εισ}} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}$$

. Η άσκηση μας λέει ότι αυτός ο λόγος ισούται με $1/2$ για $f_1 = 200\ Hz$ και $f_2 = 4\times10^3\ Hz$. Άρα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{8^2}{8^2+\left[2\pi f_1 L - \frac{1}{2\pi f_1 C}\right]^2} \\ \frac{1}{4} &= \frac{8^2}{8^2+\left[2\pi f_2 L - \frac{1}{2\pi f_2 C}\right]^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C &= 54.6\ \mu F \\ L &= 580\ \mu H. \end{aligned}$$

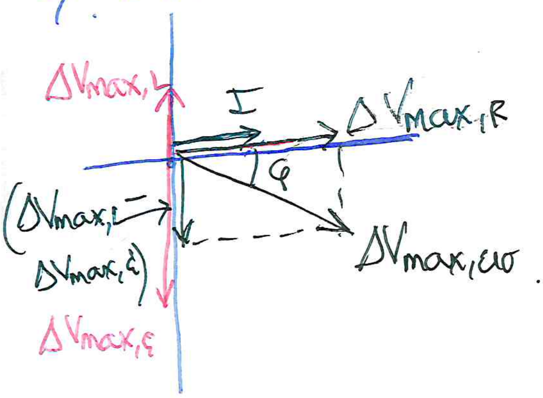
(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να δείξετε τη λύση αυτού του συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους).

γ). Η μέγιστη τιμή του λόγου $\frac{\Delta V_{max,εξ}}{\Delta V_{max,εισ}}$ αντιστοιχεί στη συχνότητα για την οποία $X_L = X_C$ και είναι ίση με 1.

δ). Για να έχουμε $X_C = X_L$ θα πρέπει:

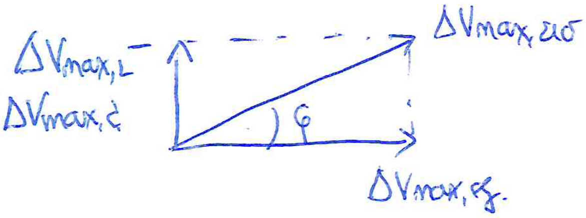
$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 894\ Hz.$$

ε). Στα 200 Hz, $\frac{\Delta V_{max,εξ}}{\Delta V_{max,εισ}} = \frac{R}{Z} = \frac{1}{2}$ και $X_L - X_C < 0$. Άρα:



Οπότε: $\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{\Delta V_{max,εξ}}{\Delta V_{max,εισ}}\right) = -\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ η $\Delta V_{εισ}$ καθυστερεί κατά 60° σε σχέση με την $\Delta V_{εξ}$.

Όταν $f=f_0$, $X_L = X_C$ και άρα $\Delta V_{εισ}$ και $\Delta V_{εξ}$ είναι συμφασικά. Στα 4000 Hz, $X_L - X_C > 0$, άρα:



άρα: $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$,

η $\Delta V_{εισ}$ προηγείται της $\Delta V_{εξ}$ κατά 60°.

στ) Η μέση ισχύς που μεταφέρεται στο ηχείο είναι:

$$P_{μέση} = I_{rms}^2 R = \frac{(\Delta V_{rms,εξ})^2}{R} = \frac{(\Delta V_{max,εξ})^2}{2R}$$

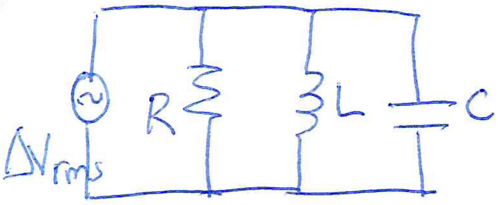
Για $f=200$ ή 4000 Hz, : $P_{μέση} = \frac{(\Delta V_{max,εισ}/2)^2}{2R} = 1.56\,W.$

Όταν $f=f_0$: $P_{μέση} = \frac{(\Delta V_{max,εισ})^2}{2R} = 6.25\,W.$

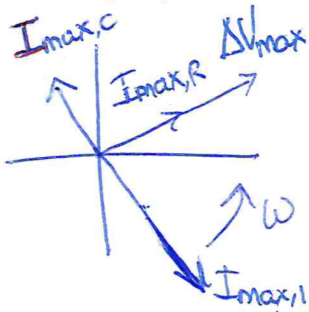
ζ). Για να βρούμε τον συντελεστή ποιότητας, έχουμε:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = 0.408.$$

$\boxed{6}$



Στην εικόνα φαίνεται ένα κύκλωμα RLC παράλληλης συνδεσμολογίας. Οι στιγμιαίες τάσεις (και οι ενεργές) είναι οι ίδιες στα άκρα καθενός από τα τρία στοιχεία του κυκλώματος, ενώ κάθε μία τους είναι σε φάση με το ρεύμα στον αντιστάτη. Τα ρεύματα στον πυκνωτή C και στο πηνίο L προηγούνται ή υστερούν, αντίστοιχα, του ρεύματος στον αντιστάτη, με τον τρόπο που φαίνεται στο διάγραμμα φασιθετών του ρεύματος. (α) Δείξτε ότι το ενεργό ρεύμα που παρέχεται από την πηγή είναι:



$$I_{rms} = \Delta V_{rms}\left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2\right]^{1/2}.$$

β) Δείξτε ότι η γωνία φάσης ϕ μεταξύ ΔV_{max} και I_{max} δίνεται από τη σχέση:

$$\tan\phi = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right).$$

ΛΥΣΗ

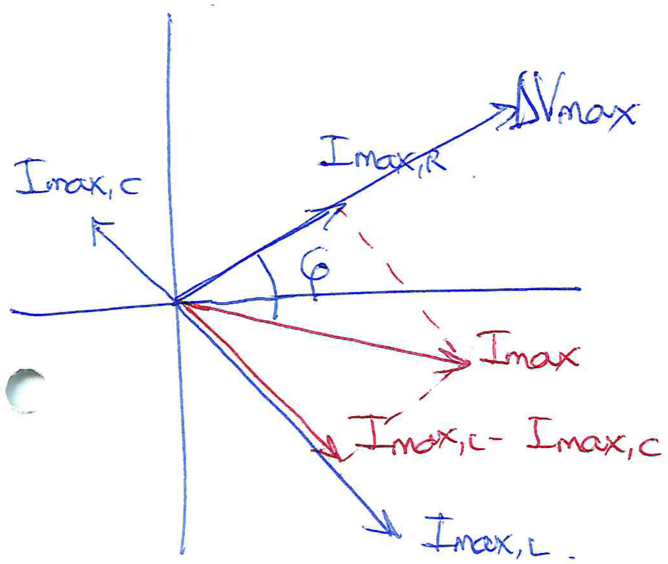
α) Σ' ότι αφορά τα ρεύματα που διαρρέουν τα στοιχεία του κυκλώματος ισχύουν: $I_{max,R} = \frac{\Delta V_{max}}{R}$, $I_{max,C} = \frac{\Delta V_{max}}{X_C}$ και $I_{max,L} = \frac{\Delta V_{max}}{X_L}$. Με βάση το διάγραμμα των φασιθετών που μας δίνεται, το ρεύμα που παρέχεται από την πηγή είναι ίσο με: $I_{max} = \sqrt{I_{max,R}^2 + (I_{max,L} - I_{max,C})^2}$. Άρα:

$$I_{max} = \Delta V_{max}\left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2\right]^{1/2}.$$

Αφού $I_{rms} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$, $\Delta V_{rms} = \frac{\Delta V_{max}}{\sqrt{2}}$, αν διαιρέσω την παραπάνω σχέση με $\sqrt{2}$, θα έχω:

$$I_{rms} = \Delta V_{rms}\left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2\right]^{1/2}.$$

β) Για να βρω την γωνία φάσης μεταξύ ΔV_{max} και I_{max}, παρατηρώ από το διάγραμμα των φασιθε-τών ότι:



$$\tan\varphi = \frac{I_{max,L} - I_{max,C}}{I_{max,R}},$$

άρα:

$$\tan\varphi = \Delta V_{max}\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\left(\frac{1}{\Delta V_{max}/R}\right) \Rightarrow$$

$$\tan\varphi = R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$