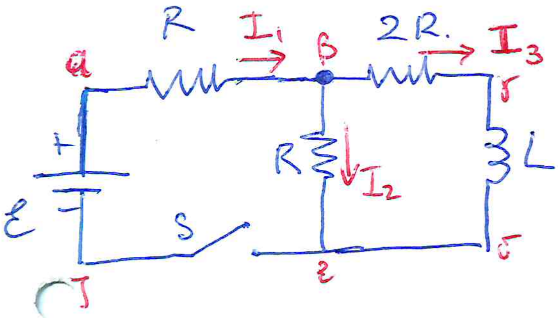
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 10

1 Ο διακόπτης στο κύκλωμα είναι ανοιχτός για $t<0$. Τη χρονική στιγμή $t=0$, ο διακόπτης κλείνει. Θεωρήστε ότι $R=4\Omega$, $L=1H$ και $\mathcal{E}=10V$. Μετά το κλείσιμο του διακόπτη, βρείτε το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου (α) στο πηνίο και (β) στον διακόπτη.

ΛΥΣΗ



(α) Ισχύουν:

(σημείο β): $I_1 = I_2 + I_3$ (1)

βρόχος αβεζ : $\mathcal{E} - I_1 R - I_2 R = 0$ (2)

βρόχος αγδζ : $\mathcal{E} - I_1 R - I_3 2R - L\dfrac{dI_3}{dt} = 0$ (3)

(διατρέχουμε τους βρόχους δεξιόστροφα).

Από (1) και (2): $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R} + \dfrac{I_3}{2}$ (4). (Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να κάνετε τις πράξεις).

Η (3) λόγω της (4): $\mathcal{E} - \left(\dfrac{\mathcal{E}}{2R} + \dfrac{I_3}{2}\right)R - 2I_3 R - L\dfrac{dI_3}{dt} = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{\mathcal{E}}{2} - \dfrac{5R}{2} I_3 - L\dfrac{dI_3}{dt} = 0$, που είναι της μορφής:

$\mathcal{E}' - I_3 R' - L\dfrac{dI_3}{dt} = 0$ $\left(\mathcal{E}' = \dfrac{\mathcal{E}}{2},\ R' = \dfrac{5R}{2}\right)$, άρα:

$I_3 = \dfrac{\mathcal{E}/2}{5R/2}\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$ (Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να λύσετε την διαφορική εξίσωση).

$\tau = L/R' = 0.1s$, άρα, τελικά το ρεύμα στο πηνίο:

$$\boxed{I_3 = 0.5A\left[1 - e^{-10t/s}\right]}$$

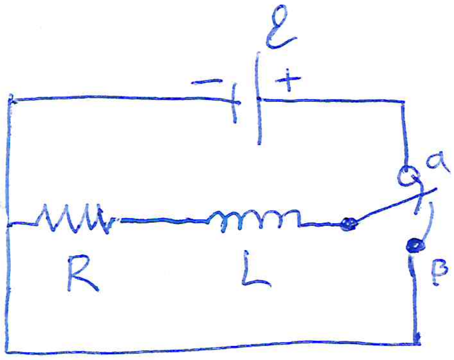
(β) Η (4) γράφεται: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R} + \dfrac{I_3}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{I_1 = 1.5A - (0.25A)\,e^{-10t/s}}$$

(Οι φοιτητές θα πρέπει να μπορείτε να κάνετε τις πράξεις).

$\boxed{2}$ Ένα πηνίο 140 mH και ένας αντιστάτης 4.9 Ω συνδέονται μέσω ενός διακόπτη με μία μπαταρία 6V. (α) Αφού θέσουμε αρχικά τον διακόπτη στη θέση α (οπότε η μπαταρία είναι συνδεδεμένη στο κύκλωμα), πόσος χρόνος θα περάσει μέχρι το ρεύμα να φτάσει τα 220 mA; (β) Πόσο είναι το ρεύμα στο πηνίο 10s μετά το κλείσιμο του διακόπτη; (γ) Στη συνέχεια, θέτουμε ακαριαία τον διακόπτη από τη θέση α στη θέση β. Πόσος χρόνος θα περάσει μέχρι να μειωθεί το ρεύμα στα 160 mA;

ΛΥΣΗ



(α) Σύμφωνα με τη θεωρία (θα πρέπει οι φοιτητές να μπορούν να το δείξουν:)

$$I = I_{max}\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

$$\tau = L/R = 28.6 \text{ ms}, \quad I_{max} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1.22 \text{A}. \text{ Άρα:}$$

$$I = 1.22\left(1 - e^{-t/26.8\text{ms}}\right) \Rightarrow \quad 0.22 \text{ A} = 1.22\text{A}\cdot\left(1 - e^{-t/26.8\text{ms}}\right) \Rightarrow$$

$t = 5.66$ ms. (Θα πρέπει οι φοιτητές να μπορείτε να κάνετε τις πράξεις).

β) $I(t = 10s) = I_{max}\left(1 - e^{-\frac{10}{0.0286}}\right) = 1.22 \text{ A}.$

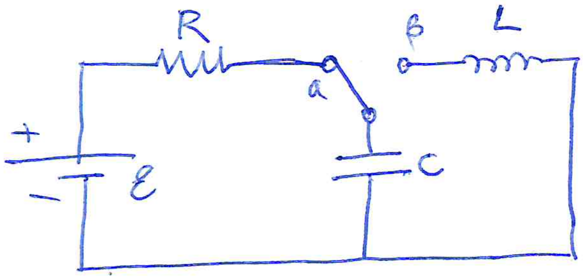
γ) Σύμφωνα με τη θεωρία:

$$I = I_{max}\, e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$160\text{mA} = 0.16 \text{ A} = 1.22\text{A}\cdot e^{-t/\tau} \rightarrow \quad t = 58.1 \text{ ms}.$$

3 Ο διακόπτης στο κύκλωμα της εικόνας βρίσκεται για μεγάλο χρονικό διάστημα στη θέση α. Τη στιγμή $t=0$, ο διακόπτης τίθεται στη θέση β. Μετά από αυτή τη χρονική στιγμή, βρείτε (α) τη συχνότητα της ταλάντωσης στο κύκλωμα LC, (β) το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή, (γ) το μέγιστο ρεύμα στο πηνίο, και (δ) τη συνολική ενέργεια του κυκλώματος όταν $t=3s$.

ΛΥΣΗ



$\mathcal{E}=12V$, $R=10\Omega$, $L=0.1H$, $C=1\mu F$.

α). $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow 2\pi f=\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow$

$f=503\ Hz$.

β). $Q_{max}=C\mathcal{E}=12\mu C$ (Q_{max} είναι το φορτίο όταν ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος).

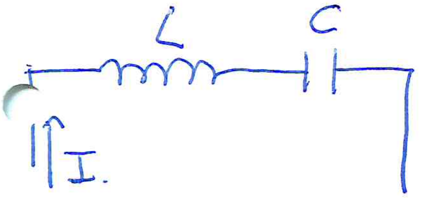
γ). Ισχύει: $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2=\frac{1}{2}L I_{max}^2 \Rightarrow I_{max}=37.9\ mA$.

δ). Για όλες τις χρονικές στιγμές:

$E=\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 \Rightarrow E=72\mu J$.

4. Ένα πηνίο αυτεπαγωγής L και ένας πυκνωτής χωρητικότητας C έχουν συνδεθεί σε σειρά. Το ρεύμα στο κύκλωμα αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση $I=kt$, όπου k είναι μία σταθερά. Αρχικά, ο πυκνωτής δεν έχει φορτίο. Βρείτε (α) την τάση στα άκρα του πηνίου συναρτήσει του χρόνου, (β) την τάση στα άκρα του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου, και (γ) πότε η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή ξεπερνά για πρώτη φορά την αποθηκευμένη ενέργεια στο πηνίο.

ΛΥΣΗ



α) $\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = -Lk.$

Η τάση είναι σταθερή ως προς τον χρόνο.

β) Ισχύει, εξ ορισμού: $I=\frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q(t)=\int_0^t It \Rightarrow$

$Q(t)=\frac{1}{2}kt^2$. Η σχέση καθορίζει τη μεταβολή φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή. Άρα, η τάση στα άκρα του πυκνωτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta V_C = \frac{Q}{C} \Rightarrow \Delta V_C(t) = \frac{kt^2}{2C}$$, αυξάνεται με το χρόνο.

(γ). Όταν:

$$\frac{1}{2}C\Delta V_c^2 = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{LC}.$$

5. Έστω ότι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου έξω από μία σφαίρα ακτίνας R είναι $B = B_0 (R/r)^2$, όπου B_0 είναι μια σταθερά. (α) Βρείτε τη συνολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο εξωτερικά της σφαίρας. (β) Υπολογίστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) χρησιμοποιώντας τις τιμές $B_0 = 5\times10^{-5}\,T$ και $R = 6\times10^{6}\,m$, οι οποίες αντιστοιχούν στο μαγνητικό πεδίο της Γης.

ΛΥΣΗ

(α). Πυκνότητα ενέργειας μαγνητικού πεδίου:

$u = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$, οπότε για μαγνητικό πεδίο $B(r) = B_0 \left(\dfrac{R}{r}\right)^2$,

$u(r) = \dfrac{B_0^2}{2\mu_0}\left(\dfrac{R}{r}\right)^4$. $(r>R)$. Για να βρούμε τη συνολική ενέργεια αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο εξωτερικά της σφαίρας θα πρέπει να ολοκληρώσω. Η ενέργεια σε σφαιρικό φλοιό, ακτίνας r και πάχους dr:

$$dU = u\,dV = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\left(\frac{R}{r}\right)^4 4\pi r^2 dr \Rightarrow du = \frac{2\pi B_0^2 R^4}{\mu_0}\frac{dr}{r^2}.$$

Άρα, η συνολική ενέργεια είναι:

$$U_{tot} = \int_R^\infty du = \int_R^\infty \frac{2\pi B_0^2 R^4}{\mu_0}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \dots \Rightarrow U_{tot} = \frac{2\pi B_0^2 R^3}{\mu_0}.$$

β)... για τη Γη:

$$U_{tot} = 2.7\times10^{18}\,J$$

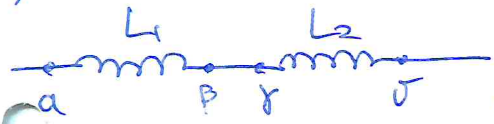
(Για παράδειγμα, ισχύς ΑΗΣ Αγ. Δημητρίου $\simeq$ 1,6 GW, άρα το U_{tot} είναι ικανό να προσφέρει την ενέργεια που παράγει ο ΑΗΣ σε ~53.5 χρόνια).

6. Δύο ιδανικά πηνία L_1 και L_2 έχουν μηδενική εσωτερική αντίσταση και απέχουν αρκετά μεταξύ τους ώστε το μαγνητικό πεδίο του ενός να μην επηρεάζει το άλλο. (α) Αν τα πηνία είναι συνδεδεμένα σε σειρά, δείξτε ότι ισοδυναμούν μ' ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή $L_{ισοδ} = L_1 + L_2$. (β) Αν τα πηνία είναι συνδεδεμένα παράλληλα, δείξτε ότι ισοδυναμούν μ' ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή $\frac{1}{L_{ισοδ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$. γ) Και αν...; Θεωρήστε τώρα δύο πηνία L_1 και L_2 με <u>μη</u> μηδενικές εσωτερικές αντιστάσεις R_1 και R_2, αντίστοιχα. Υποθέστε ότι εξακολουθούν να βρίσκονται μακριά το ένα από το άλλο, ώστε η αμοιβαία επαγωγή τους να είναι μηδενική, και ότι είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Δείξτε ότι ισοδυναμούν μ' ένα πηνίο με $L_{ισοδ} = L_1 + L_2$ και $R_{ισοδ} = R_1 + R_2$. δ) Όταν αυτά τα ίδια πηνία είναι συνδεδεμένα παράλληλα, ισχύει κατ' ανάγκη ότι ισοδυναμούν μ' ένα πηνίο με $\frac{1}{L_{ισοδ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ και $\frac{1}{R_{ισοδ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$;

ΛΥΣΗ

α). Όταν είναι συνδεδεμένα σε σειρά:

I κοινό σ' στα δύο, και:



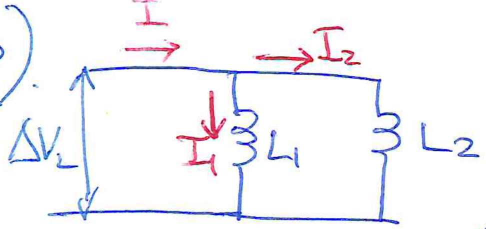
$\Delta V_{ολ} = \Delta V_{αδ} = \Delta V_{αβ} + \Delta V_{γδ} \Rightarrow$

$$\Delta V_{ολ} = \underbrace{-L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt}}_{\text{άθροισμα διαφοράς δυναμικού στα άκρα των } L_1 + L_2} \Rightarrow \Delta V_{ολ} = -(L_1 + L_2)\frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\Delta V_{ολ} = -L_{ισοδ}\frac{dI}{dt}, \text{ όπου:}$$

$$L_{ισοδ} = L_1 + L_2.$$

β).



Όταν είναι συνδεδεμένα παράλληλα, τότε ΔV_L κοινό και στα δύο. Άρα:

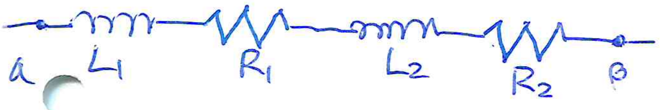
$$\left.\begin{aligned} \Delta V_L &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} \\ \Delta V_L &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\Delta V_L}{L_1} &= \frac{dI_1}{dt} \\ -\frac{\Delta V_L}{L_2} &= \frac{dI_2}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\Delta V_L\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) = \frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow$$

$$-\Delta V_L\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) = \frac{d(\overbrace{I_1+I_2}^{I})}{dt} \Rightarrow \Delta V_L = -\frac{1}{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}}\frac{dI}{dt}, \text{ άρα:}$$

$$\frac{1}{L_{ισοδ}} = \frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}.$$

γ). Σ' αυτή την περίπτωση:

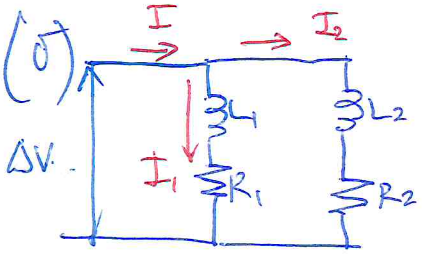


, I συνεχίζει να είναι κοινό για όλα τα στοιχεία συνδεδεμένα σε σειρά, άρα:

$$\underbrace{-L\frac{dI}{dt} - IR_1 - L_2\frac{dI}{dt} - IR_2}_{\text{ολική διαφορά δυναμικού στα άκρα, } a+\beta} = -(L_1+L_2)\frac{dI}{dt} - (R_1+R_2)\,I$$

Άρα η διάταξη ισοδυναμεί με διάταξη ενός πηνίου $L_{ισοδ}=L_1+L_2$, και μίας αντίστασης: $R_{ισοδ}=R_1+R_2$.

(δ)



Σ' αυτή την περίπτωση:

$$\Delta V = -L_1\frac{dI_1}{dt} - I_1R_1 \quad (1)$$

$$\Delta V = -L_2\frac{dI_2}{dt} - I_2R_2. \quad (2)$$

και: $I = I_1+I_2 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}$. (3).

(1), (2) $\Rightarrow -L_1\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} - I_1R_1 + I_2R_2 = 0$. (4).

Αν $\frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = 0$, τότε από την (4) έχουμε: $-I_1R_1 + I_2R_2 = 0 \Rightarrow$

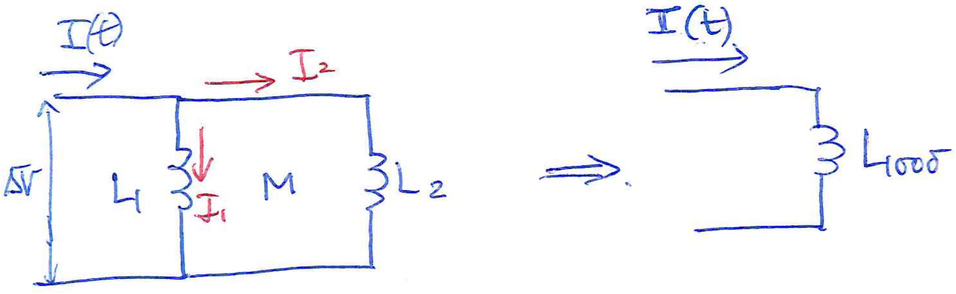
$I_1R_1 = I_2R_2 = \Delta V \Rightarrow I = \Delta V\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, άρα $\frac{1}{R_{ισοδ}} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

Αν κάποια χρονική στιγμή $I_1 = I_2 = 0$, τότε:

$$-L_1\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} = 0 \Rightarrow \Delta V = -L_1\frac{dI_1}{dt} = -L_2\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\frac{1}{L_{ισοδ}} = \frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$$

7. Δύο πηνία με συντελεστές αυτεπαγωγής L_1 και L_2 είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ των δύο πηνίων είναι M. Βρείτε τον ισοδύναμο συντελεστή αυτεπαγωγής $L_{ισοδ}$ του συστήματος.



ΛΥΣΗ

Ισχύουν:

$$\Delta V = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad (1)$$

$$\Delta V = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \quad (2)$$

$$\Delta V = -L_{ισοδ} \frac{dI}{dt} \quad (3).$$

Από (1): $-\frac{dI_1}{dt} = \frac{\Delta V}{L_1} + \frac{M}{L_1}\frac{dI_2}{dt} \quad (4).$

Από (2) λόγω (4) έχουμε: $-L_2 \frac{dI_2}{dt} + M\left(\frac{\Delta V}{L_1} + \frac{M}{L_1}\frac{dI_2}{dt}\right) = \Delta V \Rightarrow$

$$\left(-L_2 + \frac{M^2}{L_1}\right)\frac{dI_2}{dt} = \Delta V - M\frac{\Delta V}{L_1} \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{dI_2}{dt}\left(-L_1L_2 + M^2\right) = \Delta V(L_1 - M) \quad (5).$$

Από (2) έχουμε: $-\frac{dI_2}{dt} = \frac{\Delta V}{L_2} + \frac{M}{L_2}\frac{dI_1}{dt} \quad (6).$

Αντικαθιστώ το $\frac{dI_2}{dt}$ από την (6) στην (1), κ' παίρνω:

$$\Delta V = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M\left(\frac{\Delta V}{L_2} + \frac{M}{2}\frac{dI_1}{dt}\right) \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{dI_1}{dt}\left(-L_1L_2 + M^2\right) = \Delta V(L_2 - M) \quad (7)$$

Προσθέτω τις (5) και (7) και παίρνω:

$$\underbrace{\left(\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}\right)}_{= \frac{dI}{dt}}\left(-L_1L_2 + M^2\right) = \Delta V\left(L_1 + L_2 - 2M\right) \Rightarrow$$

$$\Delta V = -\frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Άρα από την (3) έχαμε:

$$\boxed{L_{ισοδ} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.}$$