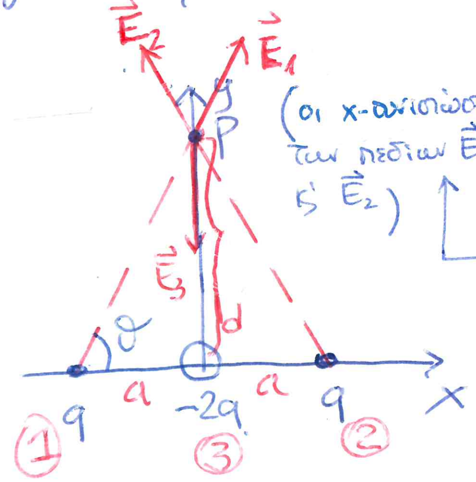
1ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1 Τρία σημειακά φορτία q, −2q, και q βρίσκονται κατά μήκος του άξονα x, όπως στο παρακάτω σχήμα. Αποδείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σ' ένα απομακρυσμένο σημείο P $(d \gg a)$ κατά μήκος του άξονα y είναι: $\vec{E} = -k_e \dfrac{3qa^2}{d^4}\hat{j}$.

Αυτή η κατανομή φορτίου, η οποία βασικά είναι ισοδύναμη με δύο ηλεκτρικά δίπολα, λέγεται ηλεκτρικό τετράπολο. Σημειώστε ότι το $\vec{E}$ μεταβάλλεται ως r^{-4} για το τετράπολο, r^{-3} για το δίπολο, και r^{-2} για το μονόπολο (ένα απλό φορτίο).

ΛΥΣΗ

(Λόγω συμμετρίας, δε θα υπάρχουν συνιστώσες του πεδίου στον άξονα των x).



(οι x-συνιστώσες των πεδίων $\vec{E}_1$ κ $\vec{E}_2$)

Λόγω του ότι τα θετικά φορτία 1 + 2 είναι ίσα, και επειδή το σημείο P βρίσκεται στον άξονα των y, $(E_{2,x} = -E_{1,x})$, και άρα το συνολικό πεδίο θα πρέπει να βρίσκεται κ αυτό πάνω στον άξονα των y, δηλ:

$\vec{E}_{ολ} = E_y \hat{j}$, Λόγω της αρχής της υπέρθεσης:

όπου $E_y = E_3 + E_{1,y} + E_{2,y} \Longrightarrow$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{2q}{d^2} + \frac{q}{a^2+d^2}\sin\theta + \frac{q}{a^2+d^2}\sin\theta\right\}. \quad (1)$$

$$\sin\theta = \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}} \quad (2)$$

Λόγω της (2) η (1) γράφεται:

$$E_y = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{d}{(a^2+d^2)^{3/2}} - \frac{1}{d^2}\right\} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{d}{d^3\left(1+\frac{a^2}{d^2}\right)^{3/2}} - \frac{1}{d^2}\right\} =$$

$$\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^2}\left\{\frac{1}{\left(1+a^2/d^2\right)^{3/2}} - 1\right\}.$$

Με βάση την (4), και δεδομένου ότι $a \ll d$, άρα $\frac{a}{d} \ll 1$ (ε; επομένως όροι τάξης $\left(\frac{a}{d}\right)^2$, $\left(\frac{a}{d}\right)^3$ είναι πολύ μικροί), θα έχουμε:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{d^2}\right)^{3/2}} \simeq 1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{d^2} \quad (*) \quad (5).$$

Λόγω της (5), η (3) γράφεται ως εξής:

$$E_y = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{d^2}\left(1-\frac{3}{2}\frac{a^2}{d^2}\right)-\frac{1}{d^2}\right\}$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2d^2-3a^2}{2d^4}-\frac{1}{d^2}\right\} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2d^2-3a^2-2d^2}{2d^4}\right\}.$$

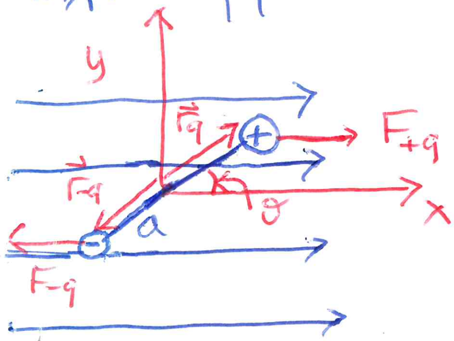
$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-3a^2)}{2d^4} = -\frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 d^4}.$$ Και άρα:

$$\boxed{\vec{E} = -k_e \cdot \frac{3qa^2}{d^4}\hat{j}}$$

$(*)$ $(1+x)^k = 1 + kx + f(x^2, x^3, + \dots) \simeq 1 + kx,$

αν $|x| \ll 1$

2 Ένα ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο εκτρέπεται λίγο από τη θέση ισορροπίας του, όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου η γωνία ϑ είναι μικρή. Η ροπή ηλεκτρικού διπόλου είναι $p=2qa$ και η ροπή αδράνειας του είναι I. Αν το δίπολο αφεθεί ελεύθερο απ' αυτή τη θέση, αποδείξτε ότι θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση με συχνότητα $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$.



ΛΥΣΗ

Ηλεκτρικό πεδίο ομογενές.

Συνολική δύναμη που ασκείται στο δίπολο: $\vec{F}_{q_+}+\vec{F}_{-q}=q\vec{E}-q\vec{E}=\phi$.

Συνολική ροπή των δυνάμεων:

$$\vec{\tau}_{o\lambda}=\vec{\tau}_{q_+}+\vec{\tau}_{q_-}=\vec{r}_{q_+}\otimes\vec{F}_{q_+}+\vec{r}_{q_-}\otimes\vec{F}_{q_-}=\vec{r}_{q_+}\otimes\vec{F}_{q_+}-\vec{r}_{q_-}\otimes\vec{F}_{q_+}=$$

$$=(\vec{r}_{q_+}-\vec{r}_{q_-})\otimes\vec{F}_{q_+}=2\vec{r}_{q_+}\otimes\vec{F}_{q_+}=2\vec{r}_{q_+}\otimes q_+\vec{E}=\underbrace{2q\vec{r}_{q_+}}_{\text{ροπή ηλεκτρικού δίπολου}}\otimes\vec{E}=$$

$$=2qa(\cos\vartheta\hat{i}+\sin\vartheta\hat{j})\otimes E\hat{i}\Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_{o\lambda}=-2qaE\sin\vartheta\hat{k}.\ (1).$$

Όμως ϑ πολύ μικρό, άρα $\sin\vartheta\simeq\vartheta$, άρα η (1) γράφεται:

$\vec{\tau}_{o\lambda}=-2qaE\vartheta\hat{k}$, δηλ. το δίπολο στρέφεται κατά τον άξονα των z. Οπότε: $\dot{J}_z=\tau_{o\lambda}$, και $\dot{J}_z=I\dot{\omega}$, άρα:

$$I\dot{\omega}=\tau_{o\lambda}\Rightarrow I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-\underbrace{2qa}_{p}E\vartheta\Rightarrow$$

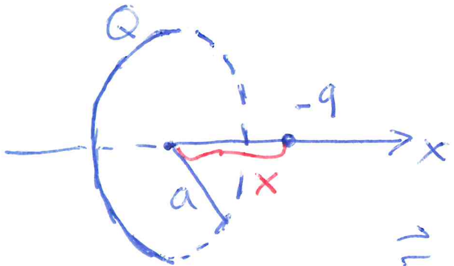
$$\boxed{\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+\frac{pE}{I}\vartheta=\phi.}$$

→ εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή, άρα το δίπολο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση, με συχνότητα:

$$\omega^2=\frac{pE}{I}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{pE}{I}}\Rightarrow\boxed{f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}}$$

3 Ένα αρνητικά φορτισμένο σωμάτιο $-q$ τοποθετείται στο κέντρο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου, όπου ο δακτύλιος έχει καθαρό θετικό φορτίο Q, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σωμάτιο, περιοριζόμενο να κινείται κατά μήκος του άξονα x, απομακρύνεται κατά μία μικρή απόσταση x κατά μήκος του άξονα (όπου $x \ll a$, a είναι η ακτίνα του δακτυλίου), και αφήνεται ελεύθερο. Αποδείξτε ότι το σωμάτιο ταλαντώνεται με απλή αρμονική κίνηση κατά μήκος του άξονα με συχνότητα:

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k_e q Q}{m a^3}\right)^{1/2}$$



ΛΥΣΗ.

Βρήκαμε (παράδειγμα βιβλίου) ότι:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{i}$$

Άρα: $$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qqx\frac{1}{a^3\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}}\hat{i} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qqx\frac{1}{a^3}\hat{i} \quad (\text{αφού } x \ll a) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqx}{a^3}\hat{i}$$ (έχουμε κίνηση μόνο στον άξονα x, άρα:).

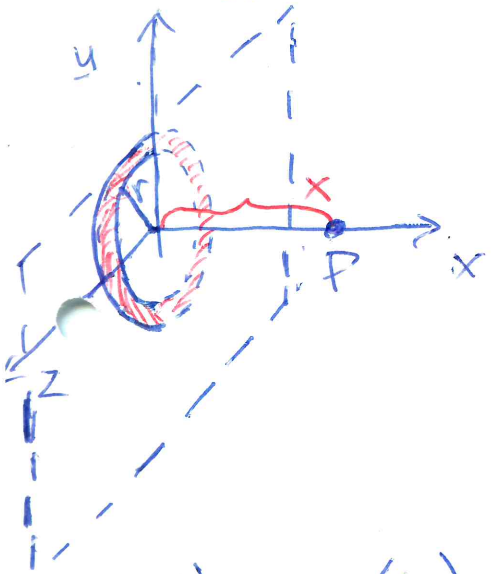
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_e\frac{Qq}{a^3}x \Rightarrow \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_e Qq}{ma^3}x = 0}_{}.$$

εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή. Άρα, ταλάντωση με συχνότητα:

$$\omega^2 = \frac{k_e Qq}{ma^3} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e Qq}{ma^3}}}$$

4. Θεωρήστε ότι έχουμε ένα φορτισμένο επίπεδο άπειρων διαστάσεων (πρακτικά μία λεπτή πλάκα πολύ μεγάλων διαστάσεων) που έχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ και βρίσκεται στο επίπεδο yz. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σ' ένα σημείο P κατά μήκος του άξονα x που έχει από την αρχή των συντεταγμένων απόσταση x.

ΛΥΣΗ.



Θεωρώ φορτισμένο δακτύλιο, φορτίου dq, ακτίνας r, και πάχους dr. Ισχύει:

$$dq = \sigma 2\pi r dr \quad (1).$$

Το πεδίο αυτού του δακτυλίου στο σημείο P (που βρίσκεται σε ευθεία κάθετη στο επίπεδο του δακτυλίου, στο κέντρο του, και σε απόσταση x από το επίπεδο) είναι (παράδειγμα βιβλίου):

$$d\vec{E} = k_e \frac{(dq)x}{(r^2+x^2)^{3/2}}\hat{i}.$$ Λόγω της (1):

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi\sigma x \frac{r dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} \quad (2).$$

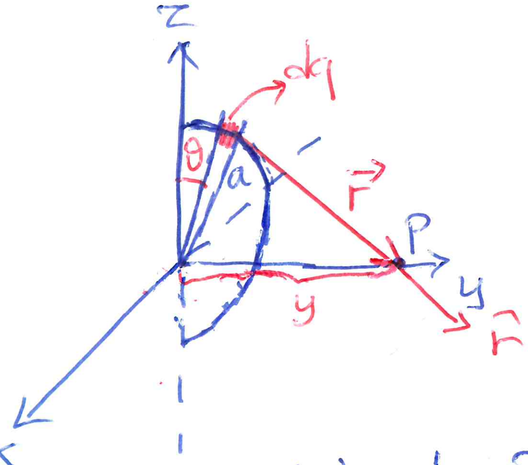
Προφανώς, το επίπεδο άπειρων διαστάσεων μπορεί να θεωρηθεί, με αυτή ως το άθροισμα άπειρων δακτυλίων, όπως ο παραπάνω, με ακτίνα από ϕ έως $+\infty$. Για τον κάθε δακτύλιο, το πεδίο θα είναι κάθετο στο επίπεδο xy, το ίδιο λοιπόν θα ισχύει και για το ολικό πεδίο: $\vec{E}_{o\lambda} = E_{o\lambda}\hat{i}$, όπου:

$$E_{o\lambda} = \int dE = \frac{2\pi\sigma x}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{r dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma x}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)\Bigg|_0^\infty \Rightarrow$$

$$E_{o\lambda} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$ άρα: $$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i} \quad (\text{για } x > \phi).$$

Ισχύει: $$\int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

5 Μία κατανομή φορτίου με γραμμική πυκνότητα λ και ακτίνα a έχει σχήμα ημικυκλίου και βρίσκεται στο επίπεδο xz με κέντρο που συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και η ακτίνα, που είναι άξονας συμμετρίας του ημικυκλίου, συμπίπτει με τον αρνητικό άξονα x. Αποδείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του άξονα y και σε απόσταση y από την αρχή των αξόνων είναι:



$$\vec E = \frac{k_e \lambda a^2}{(a^2+y^2)^{3/2}}\left(2\hat i + \pi \frac{y}{a}\hat j\right)$$

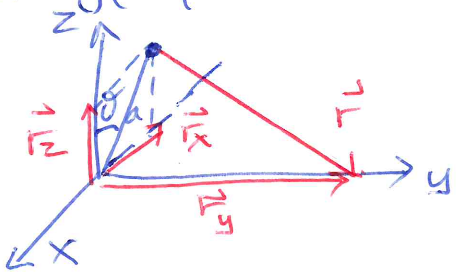
ΛΥΣΗ.

Θεωρώ στοιχειώδες φορτίο dq πάνω στο ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ισχύει: $dq = \lambda \underbrace{a\,d\theta}_{\text{μήκος τόξου}}$

Εξ ορισμού: $d\vec E = k_e \dfrac{\lambda a\,d\theta}{r^2}\hat r$ (1), όπου:

$r^2 = a^2+y^2$, $\hat r = \dfrac{\vec r}{|\vec r|}$ (2) ($\hat r$ το μοναδιαίο κατά μήκος της ευθείας που ενώνει το φορτίο dq με το P). Το μέτρο το $\vec r$ είναι $\sqrt{a^2+y^2}$.

Το ίδιο το $\vec r$, μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των 3 συνιστωσών του:



$$\vec r = \vec r_y - (\vec r_x + \vec r_z)$$
$$= y\hat j - (a\cos\theta\,\hat k - a\sin\theta\,\hat i) \quad (3)$$

Λόγω (3) και (2), η (1) γράφεται: $d\vec E = k_e \dfrac{\lambda a\,d\theta}{r^2}\,\dfrac{y\hat j - a\cos\theta\,\hat k + a\sin\theta\,\hat i}{\sqrt{a^2+y^2}}$ (4)

Μιας κι $\vec E = \int d\vec E$, χρησιμοποιώντας την (4) έχουμε:

$$\vec E = k_e \frac{\lambda a}{(a^2+y^2)^{3/2}} \int_0^{\pi} \left(y\hat j - a\cos\theta\,\hat k + a\sin\theta\,\hat i\right) d\theta \Rightarrow$$

$$\vec E = k_e \frac{\lambda a}{(a^2+y^2)^{3/2}}\left(\pi y\hat j + 2a\hat i\right) = k_e \frac{\lambda a^2}{(a^2+y^2)^{3/2}}\left(\pi \frac{y}{a}\hat j + 2\hat i\right).$$

[Ισχύουν βέβαια: $\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$, $\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = 2$]